基礎数理 I （問題）

問題１．次の（１）から（８）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい解答に最も近いものを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。共通の選択肢の中から解答を選ぶ問題においては、一つの選択肢を複数回選ぶこともあり得る。なお、必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。(40 点)

（１）　壺に N 個の球が入っており、m 個は白球、$N-m$ 個は黒球とする。ここから n 個の球を抜き出したときの白球の個数を X とする。白球に 1 から m までの番号を付けていたとして、

$$Y_i=\begin{cases}1 & (\quad i\text{ 番目の白球が選ばれた場合}\quad)\\ 0 & (i\text{ 番目の白球が選ばれなかった場合})\end{cases}$$

とすると X を Y_i で示せる。X の平均は $\boxed{\quad ① \quad}$ 、分散は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

＜①の選択肢＞

（ア）$\dfrac{m}{N}$　（イ）$\dfrac{mn}{N}$　（ウ）$\dfrac{m}{N-1}$　（エ）$\dfrac{mn}{N-1}$　（オ）$\dfrac{m(n-1)}{N-1}$

（カ）$\dfrac{mn(n-1)}{N(N-1)}$　（キ）$\dfrac{mn^2}{N(N-1)}$　（ク）$\dfrac{mn^2}{(N-1)^2}$　（ケ）$\dfrac{mn(n-1)}{N^2}$　（コ）$\dfrac{mn^2}{N^2}$

＜②の選択肢＞

（ア）$\dfrac{m(N^2-2N+m)}{N^2(N-1)}$　（イ）$\dfrac{m(N^2-2N+m)}{N(N-1)^2}$　（ウ）$\dfrac{m(2N^2-4N+m+1)}{2N^2(N-1)}$　（エ）$\dfrac{m(2N^2-4N+m+1)}{2N(N-1)^2}$

（オ）$\dfrac{mn(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$　（カ）$\dfrac{mn(N-m)(N-n)}{N(N-1)^2}$　（キ）$\dfrac{mn(N-n)(2N-m-1)}{2N^2(N-1)}$

（ク）$\dfrac{mn(N-n)(2N-m-1)}{2N(N-1)^2}$　（ケ）$\dfrac{mn(N-m-1)(N-n-1)}{N^2(N-1)}$　（コ）$\dfrac{mn(N-m-1)(N-n-1)}{N(N-1)^2}$

（２）　一定年齢の多数の人から一人を選び、その身長を X cm、体重を Y kg とする。このとき X, Y は 2 変量正規分布 $N(\mu_1,\ \mu_2,\ {\sigma_1}^2,\ {\sigma_2}^2,\ \rho)$ に従うものとする。 X, Y の同時確率密度関数は

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right]$$

であり、$Y=y$ なる条件のもとでの X の確率密度関数は

$$f(x|y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\ \boxed{\quad ① \quad}\ \right\}^2\right]$$

である。

$\mu_1=175$，$\mu_2=70$，${\sigma_1}^2=20$，${\sigma_2}^2=30$，$\rho=0.4$ のとき、ある一人の人の体重が 67 kg であった場合、身長の期待値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

＜①の選択肢＞

（ア）$\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$　（イ）$\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$　（ウ）$\dfrac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}$

（エ）$\dfrac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}+\rho\dfrac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}$　（オ）$\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$　（カ）$\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}+\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

（キ）$\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}+\rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$　（ク）$\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

＜②の選択肢＞

（ア）169.8　（イ）171.2　（ウ）171.6　（エ）172.0　（オ）172.4

（カ）172.8　（キ）173.2　（ク）173.6　（ケ）174.0　（コ）174.4

（３）　n 個の数値を計算して小数点以下を四捨五入するときの丸めの誤差を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で、区間 $(-0.5,\ 0.5)$ の一様分布に従うものとする。中心極限定理を適用し、$n = 100$ のときの丸めの誤差の総和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ が絶対値において正数 α を超えない確率が 95% となる場合、α は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

＜①の選択肢＞

（ア）2.2　（イ）2.7　（ウ）3.2　（エ）3.7　（オ）4.2

（カ）4.7　（キ）5.2　（ク）5.7　（ケ）6.2　（コ）6.7

（４）　$X,\ Y$ は同時確率密度関数 $f(x, y) = \frac{1}{4}\left(1 + xy(x^2 - y^2)\right)$　$(-1 < x < 1,\ -1 < y < 1)$ に従うものとする。 $X + Y$ の積率母関数を $M(t)$ とすると、$M(t)$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

＜①の選択肢＞

（ア）$\frac{e^t - e^{-t}}{t}$　（イ）$\frac{e^t - e^{-t}}{2t}$　（ウ）$\frac{e^t + e^{-t} - 2}{t}$　（エ）$\frac{e^t + e^{-t} - 2}{2t}$

（オ）$\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t^2}$　（カ）$\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{(2t)^2}$　（キ）$\frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{t^2}$　（ク）$\frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{(2t)^2}$

（5） 正規母集団 $N(\mu,\ \sigma^2)$ からの標本変量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ において μ が既知であるものとする。このとき母分散 σ^2 の最尤推定量 S^{*2} は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。この最尤推定量について考察する。
次の $Cramér-Rao$ の不等式について

$$V(S^{*2}) \geqq \frac{1}{nE\left(\left\{\frac{\partial log\, f(X;\sigma^2)}{\partial\sigma^2}\right\}^2\right)}$$

（左辺）＝ $\boxed{\quad ② \quad}$ 、（右辺）＝ $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。… (A)
ここで $f(X;\sigma^2)$ は母集団分布（正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ ）の確率密度関数とする。
また、$Chebyshev$ の不等式を用いて
$P\left(\left|S^{*2} - \boxed{\quad ④ \quad}\right| > \varepsilon\right) < \boxed{\quad ⑤ \quad} \rightarrow 0\ (n \rightarrow \infty)$ である。… (B)
従って、$\boxed{\quad ⑥ \quad}$ を持つことがわかる。

＜①の選択肢＞

（ア） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$　（イ） $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$　（ウ） $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

（エ） $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$　（オ） $\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-\mu^2$　（カ） $\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right\}^2$

（キ） $\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right\}^2$　（ク） $\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right\}^2$　（ケ） $\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right\}^2$

＜②、③の選択肢＞

（ア） $\frac{\sigma^4}{n}$　（イ） $\frac{2\sigma^4}{n}$　（ウ） $\frac{3\sigma^4}{n}$　（エ） $\frac{\sigma^4}{2n}$　（オ） $\frac{\sigma^4}{3n}$

（カ） $\frac{\sigma^4}{n^2}$　（キ） $\frac{2\sigma^4}{n^2}$　（ク） $\frac{3\sigma^4}{n^2}$　（ケ） $\frac{\sigma^4}{2n^2}$　（コ） $\frac{\sigma^4}{3n^2}$

＜④、⑤の選択肢＞

（ア） σ^4　（イ） $\frac{\sigma^4}{n}$　（ウ） $\frac{2\sigma^4}{n}$　（エ） $\frac{\sigma^4}{n\varepsilon^2}$　（オ） $\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2}$

（カ） σ^2　（キ） $\frac{\sigma^2}{n}$　（ク） $\frac{2\sigma^2}{n}$　（ケ） $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$　（コ） $\frac{2\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

＜⑥の選択肢＞

（ア）（A）により一致性、（B）により充足性　（イ）（A）により充足性、（B）により一致性
（ウ）（A）により一致性、（B）により有効性　（エ）（A）により有効性、（B）により一致性
（オ）（A）により充足性、（B）により有効性　（カ）（A）により有効性、（B）により充足性
（キ）（A）により充足性、（B）により最適性　（ク）（A）により最適性、（B）により充足性
（ケ）（A）により最適性、（B）により不偏性　（コ）（A）により不偏性、（B）により最適性

（６） ダンボールに一定量入った果物を販売のために一箱仕入れた。ダンボールには国内産と表示されているが、実は全て外国産なのではないかと疑っている。国内産の果物の大きさは正規分布 $N(10,\ \sigma^2)$ に従い、外国産の果物の大きさは国内産より小さいことが分かっている。ダンボールから 10 個の標本をとったところ、以下のデータが得られた。

5.2, 7.5, 10.3, 9.5, 7.6, 10.8, 8.2, 6.5, 11.0, 7.2 （単位：cm）

（ｉ）母分散 σ^2 が未知の場合、母平均 μ について、帰無仮説 $\mu = 10$ 、対立仮説 $\mu < 10$、として有意水準 5% で片側検定を行うとき、$\bar{X}$ を 10 個の標本の大きさの平均とすると、棄却域は $\bar{X} <$ $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

（ⅱ）国内産でない場合は全てその大きさが正規分布 $N(8.44\,,\ \sigma'^2)$ （σ' は未知）に従う外国産の果物であるとき、（ｉ）の片側検定について、第１種の誤りの確率は $\boxed{\quad ② \quad}$ 、第２種の誤りの確率は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

＜①の選択肢＞

（ア）6.380	（イ）6.962	（ウ）8.607	（エ）8.628	（オ）8.679
（カ）8.699	（キ）8.871	（ク）8.884	（ケ）8.929	（コ）8.941

＜②、③の選択肢＞

（ア）0.0%	（イ）2.5%	（ウ）5.0%	（エ）7.5%	（オ）10.0%
（カ）12.5%	（キ）15.0%	（ク）17.5%	（ケ）20.0%	（コ）22.5%
（サ）25.0%	（シ）27.5%	（ス）30.0%	（セ）32.5%	（ソ）35.0%

（7） ABO 血液型の分布は A 型、B 型、O 型、AB 型の比率で示され、この比率は国や地域によって違いが見られる。日本人から無作為に抽出し調べたところ、血液型の分布は下表のようになった。

血液型	A 型	B 型	O 型	AB 型
割合	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$

日本人の ABO 血液型は A 型 : B 型 : O 型 : AB 型 ＝ 4 : 2 : 3 : 1 の比率で分布するといわれている。この仮説を帰無仮説とし、上表について有意水準 5%で適合度検定を行う。抽出した標本数を $25k$ としたとき、この仮説が棄却される最小の k は $\boxed{①}$ である。

＜①の選択肢＞

（ア） 1　（イ） 2　（ウ） 3　（エ） 4　（オ） 5

（カ） 6　（キ） 7　（ク） 8　（ケ） 9　（コ） 10

（8） (x,y) のデータが下表のとおり与えられている（ y は 0 から 1 までの間の値をとるものとする)。

x	1.4	1.8	2.9	4.3	5.3
y	0.104	0.246	0.524	0.913	0.926

このとき、回帰モデルを考えるが、回帰式の値を 0 から 1 までの間に収めるために、ロジットモデル $y=\frac{e^{\alpha+\beta x}}{1+e^{\alpha+\beta x}}$ を用いて回帰式を求めると、$(\hat{\alpha},\hat{\beta})=$ $\boxed{①}$ である。

なお、$y'=\log\left(\frac{y}{1-y}\right)$ として y を変換したデータ y' は以下の通りである。

y	0.104	0.246	0.524	0.913	0.926
y'	－2.15	－1.12	0.10	2.35	2.53

＜①の選択肢＞

（ア）$(-3.52, 1.23)$　（イ）$(-2.36, 0.86)$　（ウ）$(-1.24, 0.57)$　（エ）$(-0.16, 0.22)$

（オ）$(0.22, -0.16)$　（カ）$(0.57, -1.24)$　（キ）$(0.86, -2.36)$　（ク）$(1.23, -3.52)$

問題２．次の（1）から（8）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。(60 点)

（1）　硬貨の組み合わせで所定の金額を準備する。使用しない硬貨の種類があっても良いものとし、n は正の整数とする。

（ⅰ）10 円玉と 50 円玉を組み合わせて、合計 $50\times n$円にするには $\boxed{①}$ 通りの方法がある。

（ⅱ）10 円玉、50 円玉、100 円玉を組み合わせて、合計 $100\times n$円にするには $\boxed{②}$ 通りの方法がある。

（ⅲ）10 円玉、50 円玉、100 円玉、500 円玉を組み合わせて、合計 1 万円にするには $\boxed{③}$ 通りの方法がある。

（2）　ある感染症に 10,000 人に 1 人の割合で感染している。この感染症には検査 1、検査 2 の 2 種類の検査がある。検査 1 は、本当に感染していた場合に 99.9%の確率で陽性反応を示すが、感染していない場合でも 0.1%の確率で陽性反応を示す。検査 2 は、検査 1 で陽性と診断された者に対して行う。検査1で陽性と診断された者が本当に感染していた場合、検査2は95.0%の確率で陽性反応を示す。検査 1 で陽性と診断された者が実際は感染していない場合、検査 2 は 5.0%の確率で陽性反応を示す。以下、百分率表示で小数第 2 位を四捨五入した数値を算出する。

（ⅰ）A さんが検査 1 を受診したところ、結果は陽性であった。A さんが本当に感染している確率は $\boxed{①}$ %である。

（ⅱ）検査 1 で陽性と判定された A さんは、次に検査 2 を受診し、再び陽性と判定された。A さんが本当に感染している確率は $\boxed{②}$ %である。

（3）　1 回 100 円でくじ引きを行い、当たりが出たらサイコロをふって出た目×200 円の賞金を受け取り、外れが出たら賞金を受け取れないゲームを考える。くじは常に、当たりが出る確率が 10%、外れが出る確率が 90%であり、サイコロは常に、1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとし、くじの当たり外れおよびサイコロの目は互いに独立であるものとする。ある挑戦者が、当たりが 1 回出るまでこのゲームを繰り返し実行する。以下、小数第 1 位を四捨五入した数値を算出する。

（ⅰ）この挑戦者の収支の期待値は $\boxed{①}$ 円である。

（ⅱ）この挑戦者の収支の分散は $\boxed{②}$ 円である。

（4） 池の中の魚の数 N を推定する。このため、m 匹の魚を捕らえてこれに印をつけて池に放ち、のちに n 匹の魚を捕らえたところ、k 匹の魚に印がついていた。このとき印が付いた魚が k 匹である確率を $f(k\,;N)$ とすると、$f(k\,;N)$ は、N を母数、k を変数とする確率分布だが、k が与えられたものとして未知数 N についての関数と考えると、尤度関数 $l(N)$ となる。

（ⅰ）$\dfrac{l(N)}{l(N-1)}$ ＝ $\boxed{①}$ である。

（ⅱ）$l(N)$ を最大にする N について、$\boxed{②}-1 \leqq N \leqq \boxed{②}$ である。

（ⅲ）$m＝80,\ n=100,\ k=27$ の場合、N ＝ $\boxed{③}$ である。

（5） 以下の標本は、X 社・Y 社の両社より納入されたある化学製品について、6 人の分析者（A 氏～F 氏）が分析を行って得た純度の百分率である。「X 社の純度－Y 社の純度」の区間推定を行う。

X 社　A 氏：5.6%,　B 氏：6.8%,　C 氏：6.0%,　D 氏：7.5%,　E 氏：4.7%,　F 氏：5.7%

Y 社　A 氏：5.3%,　B 氏：8.0%,　C 氏：6.9%,　D 氏：6.9%,　E 氏：4.4%,　F 氏：6.3%

以下、百分率表示で小数第 3 位を四捨五入した数値を算出する。なお、X 社・Y 社の両社で純度のばらつきは同じとみなせるものとする。

（ⅰ）分析者の違いを考慮せず、X 社・Y 社ごとの純度の推定値を元に、信頼度 95%で推定すると ($\boxed{①}$ %, $\boxed{②}$ %)である。

（ⅱ）分析者の違いを考慮して、分析者ごとの両社間の純度の差を元に、信頼度 95%で推定すると ($\boxed{③}$ %, $\boxed{④}$ %)である。

（6） 単位時間あたりの発生件数がポアソン分布に従うある都市の交通事故について考察する。

（ⅰ）平均 λ のポアソン分布に従う変数 X が非負の整数 k 以下となる確率 $\mathrm{P}(X \leqq k)$ は、$\mathrm{P}(X \leqq k) = \frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_c^\infty t^k e^{-t}dt$ と表せる。このとき、c = $\boxed{①}$ である。

（ⅱ）この右辺に自由度 $\boxed{②}$ の $\boxed{③}$ 分布の確率密度関数 $f(x)$ を用いて、$\mathrm{P}(X \leqq k) = \int_d^\infty f(x)dx$ と表せる。このとき、d= $\boxed{④}$ である。

（ⅲ）ある都市の交通事故の発生件数は 1 日平均 10.3 件であるという。1 日 15 件以上の交通事故が発生する確率を、上述の関係式を用いて近似的に計算すると $\boxed{⑤}$ % となる。なお、百分率表示で小数第 1 位を四捨五入した数値を算出する。

（7） ある契約者について、過去 5 年間のクレーム額の実績データは下表のとおりであった。

年度	1	2	3	4	5
クレーム額（万円）	18	24	13	15	25

一般的な統計では、このリスクのクレーム額の平均値は 18 万円であることが判明している。また、当該契約者の年間クレーム件数は毎年 1 件と一定であるとする。

（ｉ）全信頼の基準として「クレーム額が真の値の±10%以内に90%の確率で収まる」と設定した場合、全信頼に必要なクレーム件数は ① 件である。なお、正規近似を使用するものとし、小数第 1 位を四捨五入した数値を算出する。

（ⅱ）これをもとに予測した来年のクレーム額は ② 万円である。なお、全信頼に必要なクレーム件数は（ｉ）で算出した結果（整数値）を使用するものとし、小数第 3 位を四捨五入した数値を算出する。

（8） ある保険会社において、2 つの保険種類からの年間クレーム数の推移が下表のとおりであった。各年 t におけるクレーム数を X_t, Y_t と表す。

t	1	2	3	4	5
X_t	10	95	15	35	45
Y_t	20	25	10	15	30

X_t, Y_tの相関に関して、以下、小数第 3 位を四捨五入した数値を算出する。

（ｉ）ピアソンの ρ（ピアソンの積率相関係数（線形相関係数））は ① である。

（ⅱ）スピアマンの ρ（スピアマンの順位相関係数）は ② である。

（ⅲ）ケンドールの τ（ケンドールの順位相関係数）は ③ である。

（付表）

1．標準正規分布表（上側ε点$u(\varepsilon)$から確率εを求める表）

	*=0	*=1	*=2	*=3	*=4	*=5	*=6	*=7	*=8	*=9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

２．逆標準正規分布表（確率εから上側ε点$u(\varepsilon)$を求める表）

	*=0	*=1	*=2	*=3	*=4	*=5	*=6	*=7	*=8	*=9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

3．χ^2 分布表（自由度 m の上側 ε 点 $\chi_m^2(\varepsilon)$ を求める表）

m	ε									
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

4．F 分布表（分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側ε点$F_n^m(\varepsilon)$を求める表）

$\varepsilon = 0.050$

n	m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon = 0.025$

n	m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon = 0.010$

n	m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon = 0.005$

n	m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

５． t 分布表（自由度 m の上側 ε 点 $t_m(\varepsilon)$ を求める表）

m	ε					
	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500