年金数理（問題）

本問題においては、各設問で特に断らない限り以下のとおりとする。 １．「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。 ２．「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。 ３．「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。 ４．予定利率iは正値を取るものとする。

問題１から15までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題16から20までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題１．利力$\delta = 0.0005$、死力$\mu = 0.005$ のとき、連続払の 20 年有期年金現価率に最も近いものは次のいずれか。なお、必要であれば次の諸数値を使用しなさい。（４点）

$e^{-0.0005} = 0.99950$、$e^{-0.005} = 0.99501$、$e^{-0.05} = 0.95123$、$e^{-0.5} = 0.60653$

$e^{-0.001} = 0.99900$、$e^{-0.01} = 0.99005$、$e^{-0.1} = 0.90484$、$e^{-1.0} = 0.36788$

(A) 18.54　(B) 18.64　(C) 18.74　(D) 18.84　(E) 18.94

問題２．初年度の年金額が$2n$で毎年 1 ずつ年金額が減少し最終的に$n+1$となるような支給期間がn年の有期年金において、支給開始時における年金受給者（x歳）の年金現価として適切なものは次のいずれか。なお、給付は年 1 回期初払いとする。（４点）

(A) $\dfrac{2nN_x - nN_{x+n} - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}$

(B) $\dfrac{(2n+1)N_x - nN_{x+n} - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}$

(C) $\dfrac{2nN_x - nN_{x+n} - (S_x - S_{x+n})}{D_x}$

(D) $\dfrac{2nN_x - nN_{x+n} - (S_x - S_{x+n+1})}{D_x}$

(E) $\dfrac{2nN_x - nN_{x+n} - (S_{x+1} - S_{x+n})}{D_x}$

問題３．年金を次のように支払う場合、(x),(y),(z)の 3 人に支払う年金の現価の合計を表すものとして適切なものは次のいずれか。（４点）

・(x)が生存中は、(y),(z)のうち少なくとも一方の生存を条件として(x)に年金額 4 を支払い、同時に、(y),(z)のうち生存している者（共存の場合は両者）に年金額 1 を支払う。

・(x)の死亡後に(y),(z)が共存している場合、一方に年金額 4 を、他方に年金額 2 をそれぞれ支払う。

・(x)の死亡後に(y),(z)のどちらか一方だけが生存している場合、その者に年金額 4 を支払う。

・年金はいずれも年 1 回期末払いとする。

(A) $4(a_x + a_z) + (a_{xy} + a_{yz} - 2a_{xz}) - 2a_{xyz}$

(B) $4(a_y + a_z) + (a_{xy} + a_{xz} - 2a_{yz}) - 2a_{xyz}$

(C) $4(a_x + a_y + a_z) + (a_{xy} + a_{xz} - 2a_{yz}) - 2a_{xyz}$

(D) $4(a_x + a_y + a_z) + (a_{xz} + a_{yz} - 2a_{xy}) - a_{xyz}$

(E) $4(a_x + a_y + a_z) + (a_{xy} + a_{xz} - 2a_{yz}) - a_{xyz}$

問題４．定常状態に達している年金制度について、計算基準日以降の脱退と昇給が基礎率どおりに推移するとした場合に、その被保険者の総数と給与総額が計算基準日のものと同じになるように毎年の新規加入者数、およびその加入時の給与を見込んでいる。次を満たす場合、新規加入者 1 人あたりの加入時の給与の見込みに最も近いものは次のいずれか。（４点）

・被保険者の総数：200 人

・給与総額：80,000,000 円

・新規加入者の加入年齢：55 歳

・定年年齢：60 歳

・各年齢の被保険者数と給与指数

年齢	被保険者数	給与指数
55	50	1.0000
56	45	1.2000
57	40	1.4000
58	35	1.6000
59	30	1.8000
合計	200	―

(A) 294 千円　(B) 296 千円　(C) 298 千円　(D) 300 千円　(E) 302 千円

問題５．ある集団の死亡率は次の表のように見込まれる。2020 年の年初にちょうど 60 歳になった者について ${}_5p_{60}$に最も近いものは次のいずれか。（４点）

年齢＼西暦	2020 年	2021 年	2022 年	2023 年	2024 年	2025 年
60	0.00659	0.00651	0.00643	0.00636	0.00629	0.00622
61	0.00727	0.00718	0.00710	0.00702	0.00694	0.00687
62	0.00799	0.00790	0.00781	0.00773	0.00764	0.00756
63	0.00879	0.00869	0.00859	0.00850	0.00841	0.00832
64	0.00964	0.00954	0.00943	0.00933	0.00923	0.00914
65	0.01054	0.01043	0.01032	0.01021	0.01011	0.01001

(A) 0.95024　(B) 0.95168　(C) 0.96036　(D) 0.96130　(E) 0.96823

問題６．極限方程式が成立している給与比例制の一時金制度（保険料および給付は年 1 回期初払いであり、ともに給与に比例する）において、第n年度期初に一律 20%引き上げの給与改定が行われた。第n年度中の積立金の利回りが予定利率を 1.0%上回ることとなったため、結果として第$(n+1)$年度期初の積立金は第n年度期初の積立金と一致した。当制度における予定利率に最も近いものは次のいずれか。なお、第n年度期初における保険料の払い込みおよび給付の支払いは期初における給与改定の後に発生するものとする。（４点）

(A) 4.2%　(B) 4.7%　(C) 5.2%　(D) 5.7%　(E) 6.2%

問題７．Trowbridge モデルの年金制度（保険料は年 1 回期初払い）を発足させることにする。財政方式としては個人平準保険料方式あるいは加入年齢方式（特別保険料は定額償却）を検討している。加入年齢を 40 歳、定年年齢を 60 歳とし、発足時の人員は 40 歳の者と 45 歳の者のみが存在するものとする。また、予定利率を 2.0%、予定脱退率（死亡脱退を含む）を全年齢で 5.0%とする。このとき、加入年齢方式による発足直後の 1 年間の標準保険料と特別保険料の総額が個人平準保険料方式による発足直後の 1 年間の保険料の額を下回らない最長の特別保険料の償却年数は次のいずれか。なお、必要であれば次の諸数値を使用しなさい。（４点）

【諸数値】

$$\left(\frac{0.95}{1.02}\right)^5=0.70084、\left(\frac{0.95}{1.02}\right)^{10}=0.49117、\left(\frac{0.95}{1.02}\right)^{15}=0.34423、\left(\frac{0.95}{1.02}\right)^{20}=0.24125$$

$$\sum_{x=1}^{15}\left(\frac{0.95}{1.02}\right)^{x-1}=9.55547、\sum_{x=1}^{20}\left(\frac{0.95}{1.02}\right)^{x-1}=11.05606$$

i	$\ddot{a}_{\overline{6}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{7}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{8}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{9}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{10}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{11}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{12}\rceil}$
2.0%	5.71346	6.60143	7.47199	8.32548	9.16224	9.98259	10.78685

(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10　(E) 11

問題８．Trowbridge モデルの年金制度（ただし、保険料は 1 人あたり一定額を年 1 回期初に払い込むものとする）は定常人口で推移しており、財政方式に閉鎖型総合保険料方式を採用している。また、ある年度の期末における給付現価等の諸数値およびその他の前提は、以下のとおりであった。ある年度の期末からn年後の期末の積立金を${}^{C}F_n$とし、この年金制度の財政方式を加入年齢方式として計算した場合の責任準備金を${}^{E}V$とするとき、${}^{C}F_n > {}^{E}V \times 0.8$を満たす最小の$n$は次のいずれか。（４点）

【諸数値】
・在職中の被保険者の給付現価：12,000
・年金受給権者の給付現価：9,300
・在職中の被保険者の人数現価：40,000
・加入年齢方式の 1 人あたりの標準保険料：0.15
・積立金（${}^{C}F_0$）：2,000

【その他の前提】
・予定利率および積立金の運用利回り：2.0％
・給付の支払いは毎年一定額（1,500）が発生する。
・閉鎖型総合保険料方式による保険料は毎年期初に見直すものとする。
・保険料の払い込みおよび給付の支払いは保険料の見直しの後に発生するものとする。

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8　　(E) 10

問題９．Trowbridge モデルの年金制度（ただし、保険料は 1 人あたり一定額を年 1 回期初に払い込むものとし、加入年齢は 20 歳、定年年齢は 60 歳とする）であり、定常状態に達している年金制度について考える。財政方式は加入年齢方式であり、予定脱退率（死亡脱退を含む）は全年齢で 3.0％とするとき、ある 1 年間において脱退（死亡脱退を含む）の実績が全年齢で 5.0％であった。諸数値およびその他の前提を以下のとおりとするとき、ある 1 年間の期末における脱退差益に最も近いものは次のいずれか。（４点）

【諸数値（全て、ある 1 年間の期初における数値）】
・在職中の被保険者の給付現価：16,100
・在職中の被保険者の人数現価：31,300
・1 人あたりの保険料：0.15
・60 歳の受給権者の給付現価：591

【その他の前提】
・中途脱退（死亡脱退を含む）は年 1 回期央、定年脱退は年 1 回期末に発生する。
・期初に 59 歳の被保険者は、期央の中途脱退（死亡脱退を含む）と期末の定年脱退により全員脱退する。

(A) 228　　(B) 235　　(C) 240　　(D) 247　　(E) 253

問題10．ある年金制度において、第n年度期初に 10,000 の未積立債務があったので、特別保険料は給与比例で償却期間を 5 年とし、年 1 回期初に償却することとした。また、特別保険料率は毎年 0.0010 ずつ増加するものとした。第n年度期初の総給与 100,000 を用い、小数点第 5 位を切り上げたものを特別保険料率とし、第n年度期初から償却を開始した。その後、総給与は第$(n+2)$年度までは一定で推移したものの、第$(n+3)$年度期初に初めて 5,000 減少し、第$(n+4)$年度期初にさらに 5,000 減少した。その結果発生した、当初の償却計画と実際の償却の相違による、第$(n+4)$年度末時点の未積立債務に最も近いものは次のいずれか。なお、予定利率は 2.0%、第$(n+3)$年度以降の総給与の減少は保険料の払い込みの直前に発生するものとし、総給与が減少したことによる償却不足以外の年金財政上の後発債務は発生しなかったものとする。（４点）

(A) 348　　(B) 363　　(C) 378　　(D) 393　　(E) 408

問題11．期初に保険料C が払い込まれ、期末に給付B が支払われる年金制度があり、給付支払後の期末の積立金がF で定常状態にある。この年金制度は、期初における保険料Cの払い込み前の積立金F'が定常状態の責任準備金V を下回った場合、その期末の給付はF'/V倍される。ある年度における期末の給付支払後の積立金が$0.85F$となった。その後予定通り推移した場合、ある年度の期末より 20 年後の期末の積立金（給付支払後）に最も近いものは次のいずれか。なお、$C=0.1F$、予定利率は 2.0%とし、必要であれば$0.898^{20}=0.11629$を使用しなさい。（４点）

(A) $0.92F$　　(B) $0.94F$　　(C) $0.96F$　　(D) $0.98F$　　(E) $1.00F$

問題12．Trowbridge モデルの年金制度（ただし、保険料は 1 人あたり一定額を年 1 回期初に払い込むものとする）であり、定常人口に達している年金制度について考える。財政再計算にあたり、財政方式は加入年齢方式とし、新規加入年齢をx_e歳とするかx_e'歳（$x_e' > x_e$）とするか検討を行っている。また、いずれの場合も未積立債務があるため、特別保険料を設定する必要がある。標準保険料は新規加入年齢をx_e'歳とした方が大きくなるが、未積立債務をn年で元利均等償却するとした場合、財政再計算直後の 1 年間の保険料総額は、新規加入年齢をx_e'歳にした方が小さくなる。予定利率を 4.0%、被保険者の総数を 200 人、在職中の被保険者の人数現価を 1,900 とするとき、nを満たす最大の整数は次のいずれか。なお、必要であれば次の諸数値を使用しなさい。（４点）

【諸数値】

・$1.04^5=1.217$、$1.04^{10}=1.480$、$1.04^{15}=1.801$

i	$\ddot{a}_{\overline{6}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{7}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{8}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{9}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{10}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{11}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{12}\rceil}$
4.0%	5.452	6.242	7.002	7.733	8.435	9.111	9.760

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10　　(E) 11

問題13．２つの年金制度（A および B）が合併することとなった。これらの年金制度は、次の関係が成立しているものとする。

・B の被保険者数および給与額は、勤続・年齢別構成比が A と等しく、規模は A の 20%である。
・A と B ともに加入年齢方式を採用している。
・A と B の計算基礎率（予定利率、予定脱退率等）は一致している。
・A において、未積立債務は給付現価の 50%であり、積立金残高は給付現価の 20%である。
・A の特別保険料率は合併直前における総給与がその後一定という前提でn年償却（元利均等償却）するように設定されている。
・B の積立金残高は A の積立金残高の 10%である。

＜合併後の制度は以下の前提とする＞
・給付水準は、合併前の A の給付水準に合わせる。
・財政方式は加入年齢方式とする。
・計算基礎率は合併前の A のものを使用する。
（したがって、標準保険料率は合併前の A の標準保険料率と一致する。）
・未積立債務を総給与（合併前の A と B の総給与の合計）の一定割合で償却（元利均等償却）、償却年数は合併前の A における残余償却年数n年とする。

このとき、「合併後の特別保険料率÷合併前の A の特別保険料率」に最も近いものは次のいずれか。（４点）

(A) 0.83　　(B) 1.03　　(C) 1.13　　(D) 1.24　　(E) 1.36

問題14．定年退職者には脱退した年度の翌年度の期初から年金額 1 の 10 年確定年金を支給する年金制度について、定年年齢を 60 歳から 65 歳へ引き上げた場合を考える。定年年齢引き上げに合わせて 60 歳以上の中途退職者に「α×加入年数」の一時金額を支給することとし、定年退職者には定年年齢引き上げ前と同様、脱退した年度の翌年度の期初から年金額 1 の 10 年確定年金を支給する。このとき、55 歳で加入した被保険者の加入時点の給付現価が定年年齢を引き上げたことにより減少しないよう、αを設定する。当条件を満たすαの最小値に最も近いものは次のうちいずれか。なお、計算の前提および基数表の数値は次のとおりとし、必要であれば次の年 1 回期初払い確定年金現価率を使用しなさい。（4 点）

＜計算の前提＞
・年金給付は年 1 回期初払い、一時金給付は年 1 回期央払いとする。
・新規加入は年 1 回期初に発生する。
・中途脱退（死亡脱退を含む）は年 1 回期央、定年脱退は年 1 回期末に発生する。
・期初に「定年年齢－1」歳の被保険者は、期央の中途脱退（死亡脱退を含む）と期末の定年脱退により全員脱退する。
・中途脱退（死亡脱退を含む）の給付額の算定において、加入年数は年未満切り上げとする。
・予定利率は 2.5%

＜脱退残存表に基づく基数表＞

x	D_x	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
55 歳	19,492.8	2,888.0	16,996.4	97,711.5
60 歳	7,644.5	1,132.6	6,714.6	37,085.6
65 歳	2,997.9	444.2	2,682.4	13,064.4

＜年 1 回期初払い確定年金現価率＞

n	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$
5	4.76197
10	8.97087
15	12.69091

(A) 0.96　(B) 1.16　(C) 1.36　(D) 1.56　(E) 1.76

問題15．以下の【制度内容】および【基礎率等】による年金制度がある。この年金制度の標準保険料率に最も近いものは次のいずれか。（４点）

【制度内容】

（キャッシュバランス制度）

・仮想個人勘定残高　：加入期間中の毎期初の給与の 100%（以下、給与の 100%を付与することを「持分付与」という）と前期末の仮想個人勘定残高に再評価率 2.5%で付利（以下、再評価率 2.5%で付利することを「利息付与」という）した額の合計額（なお、脱退から年金の支給開始までの期間、利息付与は継続する）

・年金の支給要件　：加入期間 20 年以上

・年金の支給開始時期および支給期間

　：60 歳支給開始年 1 回期初払いの 10 年確定年金

・年金額の計算方法　：仮想個人勘定残高÷年 1 回期初払い 10 年確定年金現価率

・一時金の支給要件　：加入期間 3 年以上かつ 20 年未満

・脱退一時金の支給時期　：脱退直後に支給

・一時金の額　：脱退時の仮想個人勘定残高

・加入年数の計算　：加入年数は年未満切り捨てとする

・制度への加入時期　：年 1 回期初

・制度からの脱退時期　：年 1 回期初（死亡脱退は発生しない）

ただし、期初に 59 歳の被保険者は、期初の中途脱退および翌期初の定年脱退により全員脱退する（定年年齢 60 歳）

・昇給時期　：年 1 回期初

・保険料の支払時期　：年 1 回期初

※期初には「<u>昇給→利息付与→新規加入→標準保険料の払い込み→持分付与→脱退（定年脱退を含む）→給付の支払い</u>」の順番で発生する。

【基礎率等】

・財政方式　：加入年齢方式（加入年齢 20 歳）

・保険料の計算方法　：標準保険料率×給与

・予定利率および給付利率　：2.5%

・予定脱退率　：$q_x = \frac{1}{120-x}$

・予定昇給率　：2.5%

(A) 99.2%　　(B) 99.4%　　(C) 99.6%　　(D) 99.8%　　(E) 100.0%

問題16．以下の空欄にあてはまる適切な記号または語句を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、①～⑤は、${}^{P}C$、${}^{T}C$、${}^{U}C$、${}^{L}C$、${}^{In}C$ のうちいずれかを（同じ記号を複数回用いてもよい）、⑥～⑧は財政方式（開放型総合保険料方式、開放基金方式を除く）を記入すること。（８点）

定常人口にある集団に、Trowbridge モデル（保険料は年 1 回期初払い）の年金制度を導入し、財政方式を開放型総合保険料方式とした場合について考える。このとき、制度発足時における保険料は、過去勤務期間の取り扱いにより異なる。

（１）例えば、制度発足時における過去勤務期間の取り扱いについては、既に退職した従業員に給付を行わず、在職中の被保険者の過去勤務期間を通算しないものとする。その際の制度発足時の 1 人あたりの保険料${}^{O}P$および保険料${}^{O}C$は、以下のように表すことができる。

$$ {}^{O}P=\frac{S^a_{FS}+S^f}{G^a+G^f} $$

$$ {}^{O}C={}^{O}P\cdot L $$

また、${}^{O}P$で使用されている給付現価を、他の財政方式の保険料で表すと以下のとおり。

- 在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価　S^a_{FS}

$$ S^a=\frac{1}{d}\cdot\left(v\cdot\boxed{①}-v\cdot\boxed{②}\right) $$

$$ S^a_{PS}=\frac{1}{d}\cdot\left(v\cdot\boxed{①}-\boxed{③}\right) $$

これらを用いて、

$$ S^a_{FS}=S^a-S^a_{PS} $$

$$ =\frac{1}{d}\cdot\left(\boxed{③}-v\cdot\boxed{②}\right) $$

- 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価　S^f

$$ S^f=\frac{v}{d}\cdot\boxed{④} $$

よって、この制度の制度発足時の保険料${}^{O}C$は、

$$ {}^{O}C=\frac{S^a_{FS}+S^f}{G^a+G^f}\cdot L $$

$$ =\boxed{⑤} $$

となり、保険料${}^{O}C$は、$\boxed{⑥}$の保険料と一致することが示される。

（２）また、過去勤務期間の取り扱いを変えてみると次のようになる。

(ア)在職中の被保険者の過去勤務期間を通算し、かつ既に退職した従業員にも給付を行う場合の制度発足時における保険料は、$\boxed{⑦}$の保険料と一致する。

(イ)在職中の被保険者の過去勤務期間は通算するが、既に退職した従業員には給付を行わない場合の制度発足時における保険料は、$\boxed{⑧}$の保険料と一致する。

なお、（イ）においては、保険料の払込時期に違いがあるため、保険料は1年の時点の差を考慮した上で等価となるように算出される。

問題17．以下の空欄にあてはまる適切な算式を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、⑤は計算基数を用いた算式とし、それ以外については計算基数を用いないこと。（８点）

連続払の終身年金現価率$\bar{a}_x$について、利力δと死力μ_xを用いて表現する。

（１） まず、利力δを求める。転化回数をmとするとき、名目利率$i^{(m)}$、実質利率iにおいて次の関係式が成り立つ。

$$1+i=\boxed{\text{①}}$$

これを、名目利率$i^{(m)}$について解くと、以下のようになる。

$$i^{(m)}=m\cdot\left\{\boxed{\text{②}}-1\right\}$$

また、$\boxed{\text{②}}$は次のように式変形することができる。

$$\boxed{\text{②}}=\ exp\left(\frac{1}{m}\boxed{\text{③}}\right)$$

ここで、$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$を用いると、

$$\boxed{\text{②}}=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{m}\boxed{\text{③}}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{m}\boxed{\text{③}}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{m}\boxed{\text{③}}\right)^3+\cdots$$

となる。これにより$i^{(m)}$は、次の式で表すことができる。

$$i^{(m)}=\boxed{\text{③}}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\boxed{\text{③}}\right)^2+\ \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{m}\right)^2\left(\boxed{\text{③}}\right)^3+\cdots$$

利力δを、$\delta=\lim_{m\to\infty}i^{(m)}$と定義すると、上記の式の第１項目しか残らないため、

$$\delta=\lim_{m\to\infty}i^{(m)}=\boxed{\text{③}}$$

となる。

（２） 次に、死力μ_xを求める。xと$x+t$の微小時間tの死亡l_x-l_{x+t}が１年間続くとした時の年間死亡数は$\frac{l_x-l_{x+t}}{t}$であり、これを期初のl_xで除して得られる年間死亡率をx歳時点の死力μ_xと定義すると、

$$\mu_x=\lim_{t\to 0}\frac{l_x-l_{x+t}}{t\cdot l_x}=-\frac{1}{l_x}\cdot\frac{dl_x}{dx}=-\frac{d\boxed{\text{④}}}{dx}$$

となる。

（３） 最後に、連続払の終身年金現価率$\bar{a}_x$ は、以下のように表すことができる。

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega-x} v^t \ {}_tp_x \, dt = \frac{1}{D_x}\int_x^{\omega} D_y \, dy$$

上記の式の計算にあたって、

$$\frac{1}{D_x}\frac{dD_x}{dx} = \frac{d\boxed{\quad ⑤ \quad}}{dx} = \frac{d\boxed{\quad ④ \quad}}{dx} + \frac{d\boxed{\quad ⑥ \quad}}{dx}$$

となること、および、Euler-Maclaurin の公式により、

$$\bar{a}_x \fallingdotseq \boxed{\quad ⑦ \quad} - \frac{1}{12}\left(\boxed{\quad ⑧ \quad}\right)$$

となる。

【Euler-Maclaurin の公式】

$f(x)$は$[a,b]$で定義された無限回微分可能な関数とする。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x=a}^{b} f(x) - \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\} - \frac{1}{12}\{f'(b)-f'(a)\} + \cdots$$

なお、問題では以下の近似式を使用すること。

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \sum_{x=a}^{b} f(x) - \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\} - \frac{1}{12}\{f'(b)-f'(a)\}$$

問題18．開放型総合保険料方式によって財政運営を行っている年金制度の財政決算を考える。当年金制度では、定年前の中途退職者に対し、「最終給与×加入年数」で算定される金額を一時金として支払う。また、保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期初に行われるものとする。このとき、以下の空欄にあてはまる適切な数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、計算結果に小数点第 3 位以下の端数が生じた場合、小数点第 3 位を四捨五入することとし、⑥、⑧については、益の場合は正値、損の場合は負値を記入すること。また、この問題における「責任準備金」は、給付現価から保険料収入現価を控除した額とする。（８点）

（１）第n年度末の貸借対照表および財政状況は以下のとおりであり、財政上の剰余金および不足金はなかった。

第n年度末貸借対照表			
積立金	(①)	責任準備金	(①)
合計	****	合計	****

＜財政状況＞

項目		第n年度末
S^p	年金受給権者の給付現価	200
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	250
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	310
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	410
G^a	在職中の被保険者の給与現価	700
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	800
F	積立金	①
P	保険料率	0.55
i	予定利率	2.0%

（２）第$(n+1)$年度において以下の事象のとおりとなった結果、第$(n+1)$年度末の貸借対照表および第$(n+1)$年度の損益計算書は以下のとおりとなった。

＜事象＞

・被保険者の脱退状況は、40 歳（加入年数 20 年）の被保険者 2 名全員が期初に脱退し、給付 60（40 歳の脱退者全員分）が支払われた。その他の被保険者の脱退は予定通りであった。なお、40 歳の被保険者の予定脱退率は 0.000、責任準備金率（保険料率を 0.55 とした場合の被保険者の給与 1 あたりの責任準備金）は 22.000 である。

・積立金の運用利回りは 10.0%であり予定利率を上回った。

・利差損益と脱退差損益以外の損益は発生していない。なお、利差損益は積立金の運用利回りが予定利率と異なる場合に発生し、脱退差損益は被保険者の脱退状況が予定と異なる場合に発生するものとする。

第$(n+1)$年度末貸借対照表			
積立金	（②）	責任準備金	（③）
		剰余金	（④）
合計	****	合計	****

第$(n+1)$年度損益計算書			
給付金	90	保険料	100
第$(n+1)$年度末責任準備金	（③）	利息収入	（⑤）
剰余金	（④）	第n年度末責任準備金	（①）
合計	****	合計	****

第$(n+1)$年度末時点の利差損益は［ ⑥ ］、40 歳の脱退者の給与総額は［ ⑦ ］、第$(n+1)$年度末時点の脱退差損益は［ ⑧ ］となる。

問題19．x歳の給与を b_xと表すとき、定年退職者に対してのみ、年金額b_{x_r}（x_rは定年年齢とする）の終身年金を支給する年金制度がある。標準保険料は給与の一定割合とするとき、この制度の標準保険料率に関して、以下の問いに答えよ。なお、財政方式は加入年齢方式であり、保険料および給付は年 1 回期初払いとする。（８点）

（１）加入年齢をx_eとした場合、標準保険料率P_{x_e}を表す式を示せ。

（２）給与指数のみが異なる 2 つの集団 A，B があり、集団 A，B の給与指数は以下のとおりとする。このとき、集団 A の標準保険料率$P_{x_e}^A$と集団 B の標準保険料率$P_{x_e}^B$の大小関係を示せ。

集団 A の給与指数：$b_x^A = a(x - x_e) + b_{x_e}$
集団 B の給与指数：$b_x^B = \beta \cdot a(x - x_e) + b_{x_e}$
　なお、$1 < a, 1 < \beta$とする。

問題20．加入期間 20 年以上の生存脱退者に対して 60 歳から 10 年確定年金を支給する年金制度が定常状態に達している。年金制度の内容が次のとおりであるとき以下の問いに答えよ。（８点）

【年金制度の内容】

・年金の支給要件	：加入期間 20 年以上
・年金の支給開始時期および支給期間	：60 歳支給開始年 1 回期初払いの 10 年確定年金
・年金額（年額）	：脱退時の年齢xに応じて 1 人あたりS_xの定額給付
・一時金	：支給しない
・加入年齢	：20 歳
・定年年齢	：60 歳
・制度への加入時期	：年 1 回期初
・制度からの脱退時期	：年 1 回期初（死亡脱退は発生しない） ただし、期初に 59 歳の被保険者は、期初の中途脱退および翌期初の定年脱退により全員脱退する
・生存脱退数	：期初x歳の脱退者数をd_xとする （ただし、d_{60}は定年脱退した人数）
・脱退後の死亡	：発生しない
・財政方式	：退職時年金現価積立方式 ただし、中途脱退した者に対しても、脱退の直後に年金現価を保険料として一括して払い込むものとする
・保険料の払い込みの時期	：年 1 回期初（脱退の直後に発生する）
・予定利率	：$i(>0)$

（１） B_x、${}^TC$およびBを次のように定義するとき、${}^TC$およびBをB_xを用いて表せ。

B_x	期初x歳で脱退した人の 1 年あたりの年金額（$d_x \times S_x$）
${}^TC$	1 年間の保険料総額
B	1 年間の年金支払総額

（２） $F^A(y,x)$および$F^B(y,x)$を次のように定義するとき、$F^A(y,x)$、$F^B(y,x)$それぞれについてB_xを用いて表せ。ただし、年齢は期初から期末までの間に 1 歳加算されるものとする。

$F^A(y,x)$	期末の年金受給待期者（期末以前に脱退して、年金の支給が開始されていない者）のうち、以下のいずれにも該当する者に対して払い込んだ保険料の元利合計（期末時点） ・期初x歳（$40 \leq x \leq 59$）で脱退した者 ・期末時点でy歳（$41 \leq y \leq 60$、$x < y$）の者
$F^B(y,x)$	期末の年金受給者のうち、以下のいずれにも該当する者に対して払い込んだ保険料の元利合計（期末時点）から、期末までに支払った年金の元利合計（期末時点）を控除したもの ・期初x歳（$40 \leq x \leq 60$）で脱退した者 ・期末時点でy歳（$61 \leq y \leq 69$）の者

（３） Fを次のように定義するとき、Fはこの年金制度の定常状態における積立金として極限方程式を満たすことを示せ。

$$F = \sum_{y=41}^{60} \sum_{x=40}^{y-1} F^A(y,x) + \sum_{y=61}^{69} \sum_{x=40}^{60} F^B(y,x)$$

以上