

年金数理（問題）

本問題においては、各設問で特に断らない限り以下のとおりとする。

1. 「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年1の年金を、退職時より終身にわたり年1回期初に支給する年金制度をいう。
2. 「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式（特定年齢方式）をいう。
3. 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
4. 予定利率は正値を取るものとする。

問題1から15までは、それぞれの選択肢から、設問の答えとして正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題16から20までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題1. 定常人口に達した年金制度において、被保険者は常に20歳で加入するものとし、定年年齢は60歳とする。この年金制度の被保険者の総数は15,000人であり、被保険者の平均年齢を35歳、被保険者の脱退時平均年齢を45歳とすると、年間脱退者数に最も近いものは次のいずれか。(4点)

- (A) 333人 (B) 375人 (C) 600人 (D) 1,000人 (E) 1,500人

問題2. (y)の死亡を条件に給付が開始され、(x)の生存中に年金額1が支払われる年m回期初払いの年金現価率の近似式として最も適切なものは次のいずれか。なお、1/m年の期間中に(y)が死亡した場合、その期間の翌期初より年金額1/mが支払われるものとする。(4点)

- (A) $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{m^2 - 1}{12m^2} \mu_x$
- (B) $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{m^2 - 1}{12m^2} (\mu_x + \delta)$
- (C) $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{m^2 - 1}{12m^2} (\mu_x + \mu_y + \delta)$
- (D) $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{m^2 - 1}{12m^2} (\mu_y + \delta)$
- (E) $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{m^2 - 1}{12m^2} \mu_y$

問題3. 以下の給付の60歳時点の年金現価率に最も近いものは次のいずれか。

- ・年金支給開始(65歳)まで生存した場合、本人に、年金額1の15年有期年金を年1回期初に支給
- ・年金支給開始までに死亡した場合、死亡の翌期初から配偶者に、年金額1の15年確定年金を年1回期初に支給
- ・年金支給開始後に死亡した場合、死亡の翌期初から配偶者に、支給期間である15年のうち残余期間にわたり同額の年金を、配偶者の生死にかかわらず年1回期初に支給

なお、予定利率は2.0%とし、本人の死亡時に配偶者が存在する割合は60%とする。また、必要であれば、以下の諸数値を使用しなさい。(4点)

【諸数値】(予定利率2.0%)

- ・ $\ddot{a}_{\overline{15}|} = 13.10625$
- ・基数表

年齢(x)	D_x	N_x	M_x
60	38,259	740,693	23,736
65	33,425	559,213	22,460
80	18,345	158,971	15,228

- (A) 11.2 (B) 11.3 (C) 11.4 (D) 11.5 (E) 11.6

問題4. 定常状態に達したTrowbridgeモデルの年金制度(保険料は年1回期初払い)において、単位積立方式の積立金を ${}^U F$ 、退職時年金現価積立方式の積立金を ${}^T F$ とすると、 ${}^U F / {}^T F$ を表す式として最も適切なものは次のいずれか。(4点)

- (A) $\frac{S^f + S_{FS}^a}{S^f - iS^a - iS^p}$ (B) $\frac{S^f + S_{FS}^a}{S^a - iS_{PS}^a + iS^f}$ (C) $\frac{S^p + S_{PS}^a}{S^a - iS^f - iS^p}$ (D) $\frac{S^p + S_{PS}^a}{S^p - iS^a + iS^f}$
- (E) $\frac{S^p + S_{PS}^a}{S^p - iS^a - iS^f}$

問題9. x 歳支給開始で t 年経過時に $\overset{\circ}{e}_{x+t}$ を支給する連続払終身年金の x 歳の年金現価が30となった。このとき、 $\overset{\circ}{e}_x$ の値に最も近いものは次のいずれか。なお、 $\overset{\circ}{e}_x$ は x 歳の平均余命であり、必要であれば、 $\bar{a}_x = 26$ 、 $\bar{a}_{x+1} = 25.5$ 、利力 $\delta = 0.015$ を使用しなさい。(4点)

- (A) 26.00 (B) 26.15 (C) 26.30 (D) 26.45 (E) 26.60

問題10. 予定利率2.0%の年金制度において、ある年度の期初の未積立債務(以下、 PSL_0 とする。)の償却にあたり、次のAとBの2つの方法を検討している。

A: 償却期間が8年~13年の弾力償却(年4回期初に払い込み)

※ 具体的には $PSL_0/\ddot{a}_{13}^{(4)}$ 以上、 $PSL_0/\ddot{a}_8^{(4)}$ 以下の額を特別保険料とし、払い込む時に特別保険料を決定する

B: 前年度末の未積立債務に対する一定割合 α ($0\% < \alpha < 100\%$)を償却
(年1回期初に払い込み)

A、Bいずれも被保険者数や給与総額によらず償却

Aにおいて最初の2年間は最小の特別保険料($PSL_0/\ddot{a}_{13}^{(4)}$)、次の6年間は最大の特別保険料($PSL_0/\ddot{a}_8^{(4)}$)を払い込んだところ、その期末における未積立債務がAとBで一致した。このとき、償却割合 α に最も近いものは次のいずれか。(4点)

- (A) 25.6% (B) 25.7% (C) 25.8% (D) 25.9% (E) 26.0%

問題11. 定年退職者のみに年金を支給する最終給与比例制の年金制度(保険料の払い込みおよび給付の支払いは期初に発生し、昇給は期末に発生)について考える。この年金制度では標準保険料は給与に標準保険料率を乗じた額としている。期初に30歳の被保険者について、予定では5%昇給するところ、実際は10%昇給した。予定利率を3.0%、標準保険料率を0.10、期初に30歳の被保険者の給与総額を10,000,000円、期初に30歳の被保険者の給与1円あたりの責任準備金を0.53円とするとき、昇給差損の額に最も近いものは次のいずれか。なお、期初に30歳の被保険者の予定脱退率は0であり、実績も予定脱退率どおりであるものとする。(4点)

- (A) 265千円 (B) 309千円 (C) 420千円 (D) 530千円 (E) 618千円

問題12. ある最終給与比例制、加入年齢方式の年金制度があり、 $n - 1$ 年度末と n 年度末の貸借対照表が以下のとおりであった。 n 年度末の給付の支払い後に、予定利率と同率の動的昇給（ベースアップ）が実施されたが、責任準備金の計算において動的昇給は織り込んでいなかったため、ベースアップによる差損（金額は期末時点で 171）が発生した。 n 年度にはその他に利差損が発生したが、それ以外の要因について差損益は生じなかった場合、利差損の額に最も近いものは次のいずれか。なお、標準保険料は給与比例、特別保険料は定額とし、保険料の払込みは年 1 回期初、給付の支払いは年 1 回期末とする。また、 n 年度における標準保険料の額は 100、特別保険料の額は 50、給付額は 171 であり、年金受給権者は $n - 1$ 年度末から n 年度末にかけて存在しなかったものとする。（4 点）

$n - 1$ 年度末貸借対照表

積立金	7,000	責任準備金	7,500
未積立債務	500		

n 年度末貸借対照表

積立金	?	責任準備金	?
未積立債務	750		

(A) 100

(B) 110

(C) 120

(D) 130

(E) 140

問題15. 以下の【制度内容】および【基礎率等】による、定年年齢を60歳とした年金制度がある。この年金制度の定年年齢を65歳に変更した場合、標準保険料率の変動割合（定年年齢を65歳とした標準保険料率÷定年年齢を60歳とした標準保険料率）に最も近いものは次のいずれか。
 なお、定年年齢を変更した制度では、60歳以降の加入期間においても、60歳以前と同様に昇給・利息付与・持分付与・脱退・保険料の払い込みが発生する。また、定年年齢の変更に伴い、年金の支給開始時期は65歳に変更され、加入期間の増加に伴い、年金の支給額も増加する。（4点）

【制度内容】

（キャッシュバランス制度）

- ・ 仮想個人勘定残高 : 加入期間中の毎期初の給与の100%(以下、給与の100%を付与することを「持分付与」という)と前期末の仮想個人勘定残高に再評価率2.5%で付利(以下、再評価率2.5%で付利することを「利息付与」という)した額の合計額(なお、脱退から年金の支給開始までの期間、利息付与は継続する)
 - ・ 年金の支給要件 : 加入期間20年以上
 - ・ 年金の支給開始時期 : 60歳(定年脱退の場合は脱退と同時)
 - ・ 年金の種類 : 年1回期初払いの10年確定年金
 - ・ 年金額の計算方法 : 仮想個人勘定残高÷年1回期初払い10年確定年金現価率
 - ・ 一時金の支給要件 : 加入期間20年未満
 - ・ 一時金の支給時期 : 脱退直後に支給
 - ・ 一時金の額 : 脱退時の仮想個人勘定残高
 - ・ 加入年数の計算 : 年未満切り捨て
 - ・ 制度への加入時期 : 年1回期初
 - ・ 制度からの脱退時期 : 年1回期初(死亡脱退は発生しない)
 ただし、期初に59歳の被保険者は、期初の中途脱退および翌期初の定年脱退により全員脱退する。(定年年齢60歳)
 - ・ 昇給時期 : 年1回期初
 - ・ 保険料の支払時期 : 年1回期初(標準保険料を払い込む最終年齢は59歳とする。)
- ※期初には「昇給→利息付与→新規加入→標準保険料の払い込み→持分付与→脱退(定年脱退を含む)→給付の支払い」の順番で発生(定年年齢を変更した制度でも同様の順番で発生)

【基礎率等】

- ・ 財政方式 : 加入年齢方式(加入年齢20歳)
- ・ 保険料の計算方法 : 給与×標準保険料率
- ・ 予定利率および給付利率 : 2.5%
- ・ 予定脱退率 : $q_x = \frac{1}{120-x}$
- ・ 予定昇給率 : 2.5%

(A) 0.85

(B) 0.92

(C) 1.00

(D) 1.08

(E) 1.17

問題16. あるポイント制の年金制度において、給与（保険料算出の基礎）は「1年あたりの付与ポイント×ポイント単価」を使用しており、保険料は「給与×保険料率」で算定される。財政再計算時の諸数値が下表のとおりであるとき、以下の空欄にあてはまる数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、財政再計算後および給付改善後の保険料率はただちに適用されるものとする。また、①、③、⑥、⑧の計算結果にパーセント単位で小数第2位以下の端数が生じた場合、小数第2位を四捨五入した数値を解答用紙に記入すること。②、④、⑤、⑦の計算においては、端数処理前の標準保険料率を使用するものとし、百万円未満の端数を四捨五入した数値を解答用紙に記入すること。（8点）

【財政再計算時の諸数値】

（単位：百万円）

項目		金額
S^p	年金受給権者の給付現価	750
S_{FS}^a	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	380
S_{PS}^a	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	430
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	660
G^a	在職中の被保険者の給与現価	5,800
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	8,000
F	積立金	1,110
$B\ddot{a}_{10 }$	給与×10年確定年金現価率（年1回期初払い）	2,500

- (1) 到達年齢方式によって財政運営を行っており、制度発足時の未積立債務のうち財政再計算時の未償却額を40百万円とするとき、財政再計算後の標準保険料率は %、責任準備金は 百万円となった。
- (2) 加入年齢方式によって財政運営を行っているとき、財政再計算後の標準保険料率は %、責任準備金は 百万円となった。
- (3) (2)において、財政再計算を行った後に、次の(A)～(C)すべての給付改善を実施する。
 (A)将来の加入期間に付与するポイントを一律20%引き上げ
 (B)ポイント単価を一律10%引き上げ（過去に付与したポイントを含め、ポイント単価を引き上げる。ただし、年金受給権者は除く。）
 (C)年金受給権者の年金額を一律5%引き上げ
 給付改善後に未積立債務がある場合は当該未積立債務に対して特別保険料を設定するものとし、剰余金は温存しないものとする。特別保険料は給与比例で年1回期初払いの10年元利均等償却とすると、責任準備金は 百万円、特別保険料率は %となった。なお、この問題において特別保険料の設定が不要な場合、⑥は「0.0」と記入すること。

- (4) 開放基金方式によって財政運営を行っており、財政再計算を行った後に、(3)の(A)～(C)すべての給付改善を実施する。給付改善後に未積立債務がある場合は当該未積立債務に対して特別保険料を設定するものとし、剰余金は温存しないものとする。特別保険料は給与比例で年1回期初払いの10年元利均等償却とすると、責任準備金は⑦百万円、特別保険料率は⑧%となった。なお、この問題において特別保険料の設定が不要な場合、⑧は「0.0」と記入すること。

問題17. Trowbridge モデルの年金制度において、2021 年度における 1 年間の財政運営の状況について考察する。財政方式は加入年齢方式とし、2021 年度に年金受給権者になる予定の者はおらず、実際になった者もないものとする。責任準備金と積立金の推移について、被保険者、年金受給権者および積立金から生じる運用収益を区分した<分析表>の空欄①から⑧にあてはまる数値を解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、分析上は、⊕積立金から生じる運用収益の (2) 積立金の変動 (予定額) は、2020 年度末の積立金から生じる運用収益のみを計上するものとし、2021 年度末の積立金の予定と実績との差額は、すべて、⊕積立金から生じる運用収益の (3) 予定と実績との差損益に区分するものとする。また、責任準備金の変動および積立金の変動については、増加は正の値、減少は負の値で記入し、損益については、差益は正の値、差損は負の値で記入すること。計算結果に小数第 1 位以下の端数が生じた場合、小数第 1 位を四捨五入すること。(8 点)

<資料 1> 年度末の財政状況

		2020 年度末	2021 年度末
S^p	年金受給権者の給付現価	8,000	7,000
S^a	在職中の被保険者の給付現価	24,000	25,500
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	9,000	8,400
G^a	在職中の被保険者の給与現価	40,000	42,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	30,000	28,000
F	積立金	20,000	20,000
i	予定利率	2.0%	2.0%

<資料 2> 2021 年度における 1 年間の資金収支 (キャッシュフロー)

B	受給者に対する年金給付額 (期初払)	900
$C1$	年金制度への標準保険料 (期初払)	800
$C2$	年金制度への特別保険料 (期初払)	0
ΔF	積立金に対する運用収益	?

<分析表>

被保険者等の区分	(1) 責任準備金の変動 (予定額)	(2) 積立金の変動 (予定額)	(3) 予定と実績との差損益	(4) 合計損益 (2)+(3)-(1)
㉞在職中の被保険者	?	?	①	②
㉟将来加入が見込まれる被保険者	?	?	?	?
㊱年金受給権者	?	?	③	④
⊕積立金から生じる運用収益	—	?	⑤	⑥
⊕合計 (㉞+㉟+㊱+⊕)	⑦	⑧	?	?

問題18. 以下の空欄にあてはまる適切な算式を解答用紙の所定欄に記入せよ。(8点)

脱退・昇給・保険料の払い込み・給付の支払いが連続的(数学的に厳密に言えば微分可能な時間の関数)である年金制度のモデル(脱退時に最終給与に比例する給付を支払い、保険料も給与比例で払い込むモデル)の給与1あたりの責任準備金を求める。

(1) 加入時における給与を1とし、各年齢の給与がこの給与の b_y 倍(y は年齢)になるとした場合、 x 歳で加入し t 年経過した被保険者の給与1あたりの責任準備金 ${}_tV_x$ は次の式で表される。

$${}_tV_x = \int_t^{\omega-x} S_\tau^{(x)} \boxed{\text{①}} d\tau - \int_t^{\omega-x} P_\tau B_\tau^{(x)} \boxed{\text{①}} d\tau \cdots (\text{ア})$$

ここに、

- ω : 最終年齢
- $S_\tau^{(x)} d\tau$: 加入期間 τ における微小期間 $d\tau$ に脱退する者の給付額
- $B_\tau^{(x)} d\tau$: 加入期間 τ における微小期間 $d\tau$ に収入される給与額
- P_τ : 加入期間 τ における保険料率
- δ : 利力

さらに、 $S_\tau^{(x)}$ と $B_\tau^{(x)}$ に関して、残存数 l_y 、脱退力 μ_y および給与指数 b_y を用いて表現すると、

$$S_\tau^{(x)} d\tau = \bar{s}_\tau^{(x)} \cdot \left(\frac{-dl_{x+\tau}}{l_{x+\tau}} \right) \left(\frac{b_{x+\tau}}{b_{x+t}} \right) = \bar{s}_\tau^{(x)} \left(\frac{l_{x+\tau} b_{x+\tau}}{l_{x+t} b_{x+t}} \right) \cdot \boxed{\text{②}} d\tau \cdots (\text{イ})$$

$$B_\tau^{(x)} = \frac{l_{x+\tau} b_{x+\tau}}{l_{x+t} b_{x+t}} \cdots (\text{ウ})$$

となる。ただし、 $\bar{s}_\tau^{(x)}$ は x 歳で加入し、加入期間 τ で脱退した者の、脱退時の給与1に対する給付額である。

(2) (ア)に(イ)、(ウ)を代入して整理すると、

$${}_tV_x = \boxed{\text{③}} \int_t^{\omega-x} \left(\bar{s}_\tau^{(x)} \cdot \boxed{\text{②}} - P_\tau \right) \cdot l_{x+\tau} b_{x+\tau} e^{-\delta\tau} d\tau \cdots (\text{エ})$$

となる。

(3) (エ)を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}_tV_x &= \delta {}_tV_x + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{l_{x+t} b_{x+t}} \right) \boxed{\text{④}} \\ &+ \boxed{\text{③}} \left(\boxed{\text{⑤}} + \boxed{\text{⑥}} \right) l_{x+t} b_{x+t} e^{-\delta t} \cdots (\text{オ}) \end{aligned}$$

(4) ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{l_{x+t}b_{x+t}} \right) &= \frac{1}{b_{x+t}} \left(\frac{-1}{l_{x+t}^2} \right) \frac{dl_{x+t}}{dt} + \frac{1}{l_{x+t}} \left(\frac{-1}{b_{x+t}^2} \right) \frac{db_{x+t}}{dt} \\ &= \frac{1}{l_{x+t}b_{x+t}} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{⑦}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{⑧}} \right) \right\} \dots\dots (\text{カ}) \end{aligned}$$

となり、また、 $\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{⑦}} \right) = \mu_{x+t}$ (脱退力) である。

(5) さらに、 $\frac{d}{dt} \left(\boxed{\text{⑧}} \right) = \lambda_{x+t}$ とし、極小時間あたりの昇給率として、「昇给力」なる概念を導入する。これらを利用して (カ) は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{l_{x+t}b_{x+t}} \right) = \frac{1}{l_{x+t}b_{x+t}} (\mu_{x+t} - \lambda_{x+t}) \dots\dots (\text{キ})$$

となり、(キ) を (オ) に代入すると

$$\frac{d}{dt} {}_tV_x = \boxed{\text{⑥}} + \delta {}_tV_x + \boxed{\text{⑨}} + \left(\boxed{\text{⑩}} \right) + \left(\boxed{\text{⑤}} \right) \dots\dots (\text{ク})$$

(6) ここで、(ク) は、その構成要素を見てみると、責任準備金の時間的経過による変化を示しており、各項の意味は次のとおりである。

⑥ : 保険料の払い込みによって収入現価が小さくなることによる増加

$\delta {}_tV_x$: 責任準備金の評価時点が進むことによって、利息による割戻しが少なくなることによる増加

⑨ : 脱退による相対的な増加

⑩ : 昇給による相対的な減少

⑤ : 給付の支払いによる減少

なお、(ク) の式を、ティーレの公式と呼ぶ。

問題19. 定常人口に達した Trowbridge モデルの年金制度（保険料は年 1 回期初払い）において、期初の被保険者の総数を L 、脱退残存表による x 歳の被保険者数を l_x 、 x 歳の平均脱退率を $1/\epsilon_x = l_x / \sum_{y=x}^{x_r-1} l_y$ (x_r は定年年齢) とする。毎年期初に、 x_1 歳、 x_2 歳および x_3 歳 ($x_1 < x_2 < x_3$) で、 $a : b : c$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) の割合で新規加入があるとき、以下の問いに答えよ。(8 点)

- (1) x_1 歳、 x_2 歳および x_3 歳のそれぞれの年齢の毎年の新規加入者数を求めよ。
- (2) この年金制度を加入年齢方式で運営し、標準保険料率を決定するために加入年齢（特定年齢）に x_1 歳を用いた。その場合、毎年発生する後発過去勤務債務の額を示せ。

問題20. Trowbridge モデルの年金制度（保険料は年 1 回期初払い）がある。財政方式は加入年齢方式、加入年齢は x_e 歳、定年年齢は x_r 歳とする。基礎率のうち、予定脱退率のみを洗い替える財政再計算を行ったところ、財政再計算前後の予定脱退率に基づく脱退残存表の被保険者数に以下の関係があった。

$$l_x^A = l_{x_e}^A - m(x - x_e)$$

$$l_x^B = l_{x_e}^B - m(x_r - x_e) + \frac{m}{(x_r - x_e)^2} (x_r - x)^3$$

$$l_{x_e}^A = l_{x_e}^B, l_x^A \geq 0 \ (x_e \leq x \leq x_r), l_x^B \geq 0 \ (x_e \leq x \leq x_r)$$

ここで、A は財政再計算前、B は財政再計算後の計数を表すものとし、 m は定数 ($m > 0$) とする。このとき、財政再計算前後の加入年齢方式による標準保険料率 $P_{x_e}^A$ 、 $P_{x_e}^B$ の大小関係を示せ。

(8 点)

以上