年金数理（問題）

本問題においては、各設問で特に断らない限り以下のとおりとする。
１．「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。
２．「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式（特定年齢方式）をいう。
３．「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
４．予定利率は正値を取るものとする。

問題１から15までは、それぞれの選択肢から、設問の答えとして正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題16から20までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題１．生存脱退と死亡脱退からなる以下の二重脱退残存表において、年齢 56 歳における死亡脱退数 $d_{56}^{(d)}$（空欄 X に入る数値）に最も近いものは次のいずれか。なお、生存脱退は期初に年間の生存脱退数の半数、期央に残り半数が発生するものとし、死亡脱退は一年を通じて一様に発生するものとする。また、表中のαおよびβにはそれぞれ同じ数値が入るものとする。（４点）

年齢 x	残存数 $l_x^{(T)}$	生存脱退数 $d_x^{(w)}$	死亡脱退数 $d_x^{(d)}$	生存脱退率 $q_x^{(w)}$	死亡脱退率 $q_x^{(d)}$	死亡率 q_x
55	100,000	α	0.05α	?	?	β
56	89,500	α	X	?	?	1.2β

(A) 531　(B) 532　(C) 533　(D) 534
(E) 535　(F) 536　(G) 537　(H) 538

問題２．定常人口の以下の 2 つの国（A 国、B 国）がある。「ある年」以降毎年、A 国の 20 歳の者のうち 1 割が B 国に移住し、B 国の 20 歳の者のうち 1 割が A 国に移住するようになった。この状態が続き、A 国および B 国が新たな定常人口となったときにおける A 国と B 国の人口の合計に最も近いものは次のいずれか。（４点）

【「ある年」より前の定常人口における前提】

項目		A 国	B 国
l_0	出生者数	200 千人	100 千人
$\mathring{e}_x$	x 歳における平均余命	$0.8\,(100-x)$	$0.5\,(100-x)$

【その他の前提】
- 移住した者が従う死力は、「ある年」より前における A 国および B 国の各年齢における死力の単純平均値とする
- 移住していない者は「ある年」以降も「ある年」より前の死力に従うものとする
- 「ある年」より前は移住が一切なく、「ある年」以降も上記以外の移住は発生しないものとする
- A 国および B 国における出生者数は「ある年」以降も変化はないものとする

(A) 20,600 千人　(B) 20,700 千人　(C) 20,800 千人　(D) 20,900 千人
(E) 21,000 千人　(F) 21,100 千人　(G) 21,200 千人　(H) 21,300 千人

問題３．60 歳支給開始、年 4 回期末払いで、かつ死亡した場合には死亡した日の属する月まで給付が行われる終身年金がある。この年金について、年金額を変えずに、20 年保証終身年金に変更することとしたい。この場合、「変更後の 60 歳時点の年金現価」÷「変更前の 60 歳時点の年金現価」に最も近いものは次のいずれか。なお、変更後の年金は 60 歳支給開始、年 4 回期末払いで、保証期間中は生死に関わらず給付し、保証期間経過後は死亡した日の属する月まで給付を行うものとする。計算にあたっては、以下の【諸数値】を使用しなさい。（４点）

【諸数値】
- 予定利率：5.0%
- 年 4 回期末払いの 20 年確定年金現価率(予定利率：5.0%)：12.6935
- 基数表(予定利率：5.0%)

年齢（x）	D_x	N_x	$\bar{M}_x$
60	4,716	59,384	1,935
80	960	5,746	703

(A) 111%　(B) 112%　(C) 113%　(D) 114%
(E) 115%　(F) 116%　(G) 117%　(H) 118%

問題４． 時刻 $t\ (t \geq 0)$ のとき$|\sin 2\pi t|$を支給する連続年金がある。利力をδとするとき、連続払いの永久年金現価$\bar{a}_{\infty}$は次のいずれか。ただし、$|\sin 2\pi t|$の「｜　｜」は、絶対値を表すものとする。（４点）

(A) $\dfrac{\pi}{\delta^2+\pi^2}\left(1+e^{-\frac{\delta}{2}}\right)$　(B) $\dfrac{\pi}{\delta^2+\pi^2}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\delta}{2}}}{1-e^{-\delta}}\right)$　(C) $\dfrac{\pi}{\delta^2+\pi^2}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\delta}{2}}}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}}\right)$

(D) $\dfrac{\pi}{\delta^2+\pi^2}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\delta}{2}}}{1-e^{-\frac{\delta}{4}}}\right)$　(E) $\dfrac{2\pi}{\delta^2+(2\pi)^2}\left(1+e^{-\frac{\delta}{2}}\right)$　(F) $\dfrac{2\pi}{\delta^2+(2\pi)^2}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\delta}{2}}}{1-e^{-\delta}}\right)$

(G) $\dfrac{2\pi}{\delta^2+(2\pi)^2}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\delta}{2}}}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}}\right)$　(H) $\dfrac{2\pi}{\delta^2+(2\pi)^2}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\delta}{2}}}{1-e^{-\frac{\delta}{4}}}\right)$

問題５．最終給与比例制（保険料および給付はともに給与に比例する）の年金制度が、予定利率iのもとで定常状態にあり、極限方程式が成立している。X年度の期初にベースアップが発生し、年金制度全体の保険料と給付が$(1+r)$倍となった。さらに、X年度の期初以降n年間の運用利回りが$j\ (>i)$となったため、$X+n$年度の期初以降、再び定常状態になり、極限方程式が成立した。このときのrとi、jの関係は次のいずれか。なお、$r>0$とし、X年度の期初以降も定常人口は維持され、保険料と給付は、X年度の期初のベースアップ以降、一定であったとする。 また、保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期末、予定利率iは変わらないものとし、選択肢において $d=i/(1+i)$ とする。（４点）

(A) $1+\mathrm{r}=\dfrac{i(1+j)^n}{j+i\{(1+j)^n-1\}}$　(B) $1+\mathrm{r}=\dfrac{j(1+j)^n}{j+i\{(1+j)^n-1\}}$

(C) $1+\mathrm{r}=\dfrac{d(1+j)^n}{j+i\{(1+j)^n-1\}}$　(D) $1+\mathrm{r}=\dfrac{j(1+j)^n}{j+d\{(1+j)^n-1\}}$

(E) $1+\mathrm{r}=\dfrac{i(1+j)^n}{j+i(1+j)\{(1+j)^n-1\}}$　(F) $1+\mathrm{r}=\dfrac{d(1+j)^n}{j+i(1+j)\{(1+j)^n-1\}}$

(G) $1+\mathrm{r}=\dfrac{j(1+j)^n}{j+d(1+j)\{(1+j)^n-1\}}$　(H) $1+\mathrm{r}=\dfrac{i(1+j)^n}{j+d(1+j)\{(1+j)^n-1\}}$

問題６．定常状態にある以下の【前提】の年金制度を考える。ある年度（第 1 年度とする）以降 5 年間の運用利回りが予定利率iと乖離したため、第 6 年度以降、予定利率iを用いて定常状態となるように、第 6 年度以降において保険料は変えずに給付を従前の給付のα倍とした。このとき、αは次のいずれか。なお、単年度の運用利回りは-100%より大きいものとする。（４点）

【前提】

・保険料：期初にCが払い込まれるものとする

・給付：期初にBが支払われるものとする

・積立金：第 1 年度初の積立金（保険料の払い込みおよび給付の支払い前）をFとする

・予定利率：i とする。予定利率 i に対し、$v=\frac{1}{1+i}$ 、 $d=1-v$ とする

（注）第t年度の運用利回りをj_tとするとき、第 1 年度初よりk $(k=1,2,3,4,5)$ 年間の運用利回りの幾何平均$geo(k)$は次式で表せられる。ただし、$geo(0)=0$ とする

$$geo(k)=\{(1+j_1)\cdot\cdots\cdot(1+j_k)\}^{\frac{1}{k}}-1$$

(A) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{(1+geo(5))^5\left(1-d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)-1\right\}$

(B) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{(1+geo(5))^5\left(1+d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)-1\right\}$

(C) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{(1+geo(5))^5\left(1-d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)\right\}$

(D) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{(1+geo(5))^5\left(1+d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)\right\}$

(E) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{geo(5)^5\cdot\left(1-d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)-1\right\}$

(F) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{geo(5)^5\cdot\left(1+d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)-1\right\}$

(G) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{geo(5)^5\cdot\left(1-d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)\right\}$

(H) $1+\dfrac{d\cdot F}{B}\left\{geo(5)^5\cdot\left(1+d\cdot\sum_{s=0}^{4}\dfrac{1}{(1+geo(s))^s}\right)\right\}$

問題７．Trowbridge モデルにおいて加入時積立方式と退職時年金現価積立方式の制度全体の定常状態における積立金の差${}^{In}F-{}^{T}F$を予定利率iおよび在職中の被保険者の給付現価S^aを用いて表すと、次のいずれか。（４点）

(A) S^a　(B) $S^a/(1+i)$　(C) $S^a(1+i)$　(D) $S^a/(1-i)$　(E) $S^a(1-i)$

問題８．Trowbridge モデルの年金制度が定常状態にあるものとする。以下の【前提】のとき、(A)～(E)に<u>誤っているもの</u>が 1 つある。その<u>誤っているもの</u>はいずれか。なお、計算結果に小数第 1 位以下の端数が生じた場合、小数第 1 位を四捨五入しなさい。また、各記号の意味は次の積立方式の制度全体の年間の標準保険料とする。（４点）

${}^{C_0}C$ ：完全積立方式
${}^{In}C$ ：加入時積立方式
${}^{E}C$ ：加入年齢方式
${}^{U}C$ ：単位積立方式
${}^{T}C$ ：退職時年金現価積立方式

【前提】

- 加入年齢：25 歳
- 定年年齢：65 歳
- 予定利率：2.0％
- $v^{40}=0.4529$
- $\ddot{a}_{65}=20$
- 新規加入者数：毎年 50 人（全員が上記の加入年齢で期初に加入する）
- 中途での脱退（死亡を含む）は発生しない
- 保険料の払い込みは年 1 回期初に発生する
- 加入年齢方式における加入年齢は 25 歳とする

(A) ${}^{C_0}C=0$　(B) ${}^{In}C=453$　(C) ${}^{E}C=649$　(D) ${}^{U}C=698$　(E) ${}^{T}C=1{,}000$

問題９．Trowbridge モデル（保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期初）に基づく年金制度の諸数値（制度発足時）は以下のとおりである。財政方式は到達年齢方式（保険料は被保険者 1 人あたりに設定）で、積立金の運用が予定利率どおりに推移したところ、第n年度に初めて期初（保険料の払い込みおよび給付の支払い前）時点の責任準備金が 37,500 を超えた。このとき、nは次のいずれか。（４点）

【年金制度の諸数値（制度発足時）】

項目		数値
S^P	年金受給権者の給付現価	15,000
S^a	在職中の被保険者の給付現価	55,000
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	35,000
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	20,000
B	制度全体の毎年度の給付額（年 1 回期初払い）	3,000
i	予定利率	3.0%
F	積立金	0
${}^EP$	財政方式を加入年齢方式とした場合の標準保険料（標準保険料は被保険者 1 人あたりに設定）	0.25
${}^PP$	財政方式を賦課方式とした場合の保険料（保険料は被保険者 1 人あたりに設定）	0.40

（注１）制度発足時の過去勤務期間に対応する給付現価は未積立債務として将来にわたり特別保険料によって償却する。

（注２）制度発足時の年金受給権者は既に退職した従業員とし、年金制度全体の人員構成は定常人口である。

（注３）制度発足時の年金受給権者は、第 1 年度から年金が支払われる。当該年金の給付は、第 1 年度の標準保険料および特別保険料で賄い、制度発足以降積立金が負値になることはないものとする。

（注４）制度発足時を期初とした年度を第 1 年度とする。

(A) 35　(B) 36　(C) 37　(D) 38

(E) 39　(F) 40　(G) 41　(H) 42

問題１０．ある年金制度（保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期初）の諸数値は以下のとおりであった。現在、加入年齢方式で運営しているが、開放基金方式に変更することを検討しており、期末における積立水準（責任準備金に対する積立金の割合）の見込みが大きい財政方式を採用することとしている。期初時点で財政再計算を行う場合、採用される財政方式と期末における積立水準の見込みに最も近い組み合わせは次のいずれか。

なお、未積立債務の償却期間を 10 年とする。また、期末の積立金の見込み額の算出について、積立金の運用利回りは予定利率どおりであるものとすること。保険料は給与に比例して払い込みを行うものとし、期初に払い込む保険料は財政再計算後の保険料率を適用する。保険料率（標準保険料率または特別保険料率）の算定においてパーセント単位で小数第 3 位以下の端数が生じた場合、小数第 3 位を四捨五入しなさい。なお、責任準備金の計算に当たっては、その四捨五入した保険料率を用いること。（４点）

【年金制度の諸数値】

項目		期初	期末 （見込み）
S^p	年金受給権者の給付現価	800	890
S^a	在職中の被保険者の給付現価	800	800
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	300	?
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	500	?
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	?	?
S^f_0	新規加入者の加入時給付現価（単年度分）	9	9
G^a	在職中の被保険者の給与現価	3,000	2,900
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	?	?
G^f_0	新規加入者の加入時給与現価（単年度分）	150	140
F	積立金	1,300	?
$\sum LB$	給与総額	300	?
B	今年度給付額	100	
i	予定利率	3.0%	
$\ddot{a}_{\overline{10}\vert}$	10 年確定年金現価率（年 1 回期初払い）	8.786	

※期初の積立金は保険料の払い込みおよび給付の支払い前の数値である。

(A) 開放基金方式、0.808　(B) 開放基金方式、0.838　(C) 開放基金方式、0.857
(D) 開放基金方式、0.885　(E) 加入年齢方式、0.816　(F) 加入年齢方式、0.837
(G) 加入年齢方式、0.859　(H) 加入年齢方式、0.872

問題１１．中途脱退者および定年退職者に対して脱退時に「脱退時の給与×加入年数」の一時金を支払う制度を考える。以下の【前提】のとき、55 歳の被保険者 1 人あたりの標準保険料に最も近いものは次のいずれか。必要であれば、以下の【諸数値】を使用しなさい。（４点）

【前提】
・この制度は定常状態に達しているものとする
・財政方式：加入年齢を 55 歳とする加入年齢方式
・加入年齢：55 歳
・定年年齢：60 歳
・予定利率i：3.0%
・制度全体の被保険者数は 4,006 人、給与総額は 23,558 とする
・予定脱退率（脱退には加入中の死亡を含む)、給与指数は以下のとおりとする

年齢	予定脱退率	給与指数
55	0.1	1.0
56	0.1	1.1
57	0.2	1.2
58	0.0	1.3
59	-	1.4

・加入時の給与は全被保険者同一である
・標準保険料の払い込みは給与比例である
・昇給、新規加入および保険料の払い込みは年 1 回期初に発生し、その順は「昇給→新規加入→保険料の払い込み」とする
・脱退および給付の支払いは年 1 回期末に発生し、その順は「脱退→当該脱退者への給付の支払い」とする
・期初に 59 歳の被保険者は期末に定年年齢到達により脱退するものとする

【諸数値】
・$v=\frac{1}{1+i}=0.97087$、$v^2=0.94260$、$v^3=0.91514$、$v^4=0.88849$、$v^5=0.86261$

(A) 5.0　(B) 5.1　(C) 5.2　(D) 5.3
(E) 5.4　(F) 5.5　(G) 5.6　(H) 5.7

問題１２．定常状態に達したある年金制度で、以下の【条件】を満たすようにn年間にわたって毎年 1 回年金受給権者に対する給付改善を実施することを検討している。このとき給付改善を行うことのできる回数nの最大値に近いものは次のいずれか。必要であれば、$\log_{10}2 = 0.301$、$\log_{10}3 = 0.477$、$\log_{10}7 = 0.845$を使用しなさい。（４点）

【条件】

・予定利率iは 2.4％

・給付改善は毎年度の期初に行う

・k回目（$1 \leqq k \leqq n$）の給付改善によって増加する給付現価（各々の給付改善を行う時点で計算した増加額）をS_kと表記する

・初回の給付改善による給付現価の増加額S_1はある正の値とし、$k \geqq 2$では$S_k = 1.008S_{k-1}$となるように給付改善を行う

・最後に給付改善を行った年度の翌年度から、n回の給付改善によって生じた後発未積立債務を以下の①、②の条件で毎年同額ずつ永久償却する

①未積立債務の償却は毎年度の期初に行う

②毎年の償却額が、S_1に予定利率iによる利息をn年間付利した額の 0.5 倍以下になる、すなわち以下の不等式を満たす

$$\sum_{k=1}^{n} S_k \times (1+i)^{n-k+1} \times \frac{1}{\ddot{a}_\infty} \leqq 0.5 \times S_1 \times (1+i)^n$$

(A) 10	(B) 13	(C) 16	(D) 19
(E) 22	(F) 25	(G) 28	(H) 31

問題１３．定年退職者に対して終身年金を支給するポイント制の年金制度について、定年年齢を 60 歳から 65 歳に延長することを考える。以下の【制度内容】および【基礎率】に基づき、制度変更後の標準保険料率が制度変更前の標準保険料率の 0.8 倍となるように 60 歳以上 65 歳未満の単年度ポイントαを定めるとき、αの値に最も近いものは次のいずれか。（４点）

【制度内容】

・制度への加入時期　：　年 1 回期初
・制度からの脱退時期　：　年 1 回期初
・年金額　：　脱退時の累計ポイント×ポイント単価
・年金の支給時期　：　年 1 回期初
・単年度ポイント　：　60 歳未満…1 ポイント
　60 歳以上 65 歳未満…αポイント（①）
・ポイント単価　：　10,000 円
・ポイントの付与　：　年 1 回期初
・標準保険料　：　単年度ポイント×標準保険料率
・保険料の払い込み時期　：　年 1 回期初

【基礎率等】

・財政方式　：　加入年齢方式
・加入年齢　：　20 歳
・予定利率　：　2.0%
・死亡率および中途脱退率　：　65 歳未満の死亡率および中途脱退率は 0 とする

（注１）　期初に発生する順は、「被保険者の脱退→当該脱退者を含む給付の支払い→新規加入者の加入→ポイントの付与→保険料の払い込み」とする。
（注２）　制度変更前の制度内容は、【制度内容】のうち①を除くものとし、【基礎率】のうち「死亡率および中途脱退率」は、60 歳未満の死亡率および中途脱退率は 0 とする。
（注３）　年金現価率は以下のとおりとする。（いずれも予定利率は 2.0%）
$\ddot{a}_{60} = 19.96$、$\ddot{a}_{65} = 16.73$、$\ddot{a}_{\overline{40|}} = 27.90$、$\ddot{a}_{\overline{45|}} = 30.08$

(A) 0.75	(B) 0.83	(C) 0.92	(D) 1.00
(E) 1.09	(F) 1.17	(G) 1.26	(H) 1.34

問題１４．A 社および B 社が共同で実施している年金制度（以下、「分割前制度」という）がある。今般、この年金制度を分割し、A 社、B 社のそれぞれが単独で年金制度を実施することとした。以下の【前提】および【分割前制度の諸数値】のもと、「分割後の A 社の特別保険料率－分割後の B 社の特別保険料率」の値に、最も近いものは次のいずれか。（４点）

【前提】

・分割前制度、分割後の A 社、B 社の年金制度は、いずれも最終給与比例方式（保険料および給付はともに給与に比例する）
・A 社の被保険者の総人数、総給与はそれぞれ B 社の 4 倍
・A 社と B 社の被保険者の年齢別人数の構成比、加入期間別人数の構成比、年齢別給与の構成比は、それぞれ互いに等しい
・A 社と B 社に年金受給権者は存在しない
・分割後の A 社、B 社の年金制度は、ともに、分割前制度の基礎率を使用する
・分割後の A 社の給付水準は、分割前制度の 1.5 倍とし、分割後の B 社の給付水準は分割前制度と同じとする
・分割前制度の積立金は、分割前制度の A 社の責任準備金と B 社の責任準備金の比で按分し、分割後の A 社および B 社の年金制度にそれぞれ配分する
・分割後の A 社の年金制度は開放基金方式で、B 社の年金制度は加入年齢方式で運営する
・分割後の A 社および B 社の年金制度の未積立債務は、それぞれ 20 年で元利均等償却する
・分割後の A 社および B 社の年金制度の保険料の払い込みは、年 1 回期初払いとする

【分割前制度の諸数値】

項目		数値
S^P	年金受給権者の給付現価	0 百万円
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	3,000 百万円
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	4,000 百万円
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	1,000 百万円
G^a	在職中の被保険者の給与現価	30,000 百万円
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	20,000 百万円
F	積立金	2,000 百万円
$\sum LB$	給与総額	1,000 百万円
i	予定利率	2.0%
a	20 年の期初払い年金現価率	16.6785

(A) 0.5%　(B) 1.0%　(C) 1.5%　(D) 2.0%
(E) 2.5%　(F) 3.0%　(G) 3.5%　(H) 4.0%

問題１５．ある制度は定常状態に達しており、脱退時の給与に、加入年数によって定まる一定率を乗じた額を脱退時に一時金として支給する最終給与比例制を採用している。ある年度の期初において、加入時から脱退時までの各歳の給与の累積額に、加入年数によって定まる一定率を乗じた額を一時金として支給する制度に変更することとした場合、次の①～③の記載のうち、正しいものを全て選択した組み合わせとして最も適切なものは次のいずれか。

なお、財政方式には加入年齢方式を用いることとし、制度変更後に脱退した場合には、加入からの給与の累積額を給付の計算に用いる。また、予定利率、加入年齢、給与、被保険者数は、以下の【前提】に定めるとおりとし、制度変更の前後で変わらないものとする。保険料は給与に比例して払い込みを行うものとし、保険料率の算定においてパーセント単位で小数第 2 位以下の端数が生じた場合、小数第 2 位を四捨五入しなさい。また、保険料の払い込み、給付の支払い、脱退および昇給は年 1 回期初であり、期初には「昇給→新規加入→給与の累積→保険料の払い込み→脱退→給付の支払い」の順番で発生するものとする。なお、必要であれば、以下の値を使用しなさい。（４点）

$\sum_{x=20}^{39} x = 590$　　$\sum_{x=40}^{59} x = 990$　　$\sum_{x=20}^{59} x \cdot \frac{60-x}{40} = 676.5$

$\sum_{x=20}^{29} \sum_{y=20}^{x} y = 1{,}265$　　$\sum_{x=30}^{39} \sum_{y=20}^{x} y = 4{,}265$　　$\sum_{x=40}^{59} \sum_{y=20}^{x} y = 21{,}530$

【前提】

・予定利率：0.0%

・加入年齢：20 歳

・x歳の給与 $= x \times 120{,}000$ (円)（$20 \le x \le 60$）

・x歳の被保険者数 $= 60 - x$ (人)（$20 \le x \le 60$）

・制度変更前の一定率

加入年数	率
0 年以上 20 年未満	0.4
20 年以上	1.5

・制度変更後の一定率

加入年数	率
0 年以上 10 年未満	0.04
10 年以上 20 年未満	0.06
20 年以上	0.075

① 35 歳の被保険者（20 歳加入）が脱退した場合、制度変更前後で給付額が 148.8 万円増加する。

② 制度変更前後で標準保険料払い込み 1 回あたりの増加額は 30 百万円以上である。

③ 全ての被保険者が 20 歳で制度に加入した場合、制度変更前後で給付現価が減少する被保険者は存在しない。

(A) ①と②と③　(B) ①と②　(C) ①と③　(D) ②と③

(E) ①　(F) ②　(G) ③　(H) いずれにも該当しない

問題１６．以下の空欄に当てはまる適切な式または語句を解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、番号の異なる空欄に同じ式が当てはまることもあるものとする。（８点）

Trowbridge モデルの年金制度を開放基金方式で運営した場合と平準積立方式で運営した場合での、定常状態における積立金の差を求める。

開放基金方式の定常状態における積立金は $\boxed{①}$ 方式の定常状態における積立金と一致することから、

$$ {}^{OAN}F = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\ \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{\boxed{②}}{x_r - x_e}\right)\left(\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) $$

平準積立方式の定常状態における積立金は、

$$ {}^{L}F = S^p + S^a - {}^{L}P \cdot G^a $$

${}^{L}P = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x}$ であるから、この式は以下のように変形できる。

$$ {}^{L}F = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\ \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{L}P \cdot \left(\frac{\boxed{③}}{D_x}\right) $$

各積立金の差は、

$$ {}^{OAN}F - {}^{L}F = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \left(\frac{\boxed{②}}{x_r - x_e}\right)\left(\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) - \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{L}P \cdot \left(\frac{\boxed{③}}{D_x}\right) $$

${}^{L}P = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x}$ を代入し、さらに、N_x を用いて整理すると以下のとおり表すことができる。

$$ {}^{OAN}F - {}^{L}F = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \left(\frac{N_{x_r}}{D_x}\right)\left(\frac{\boxed{④} - N_{x_r}}{N_{x_e} - N_{x_r}} - \frac{\boxed{⑤}}{x_r - x_e}\right) $$

次に、Trowbridge モデルの年金制度を加入時積立方式で運営した場合と平準積立方式で運営した場合での、定常状態における積立金の差を求める。

加入時積立方式の定常状態における積立金は、

$$ {}^{In}F = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\ \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \left(\frac{\boxed{⑥}}{D_x}\right) $$

各積立金の差は、N_x を用いて以下のとおり表すことができる。

$$ {}^{In}F - {}^{L}F = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \left(\frac{N_{x_r}}{D_x}\right)\left(1 - \frac{N_{x_e} - \boxed{⑦}}{N_{x_e} - \boxed{⑧}}\right) $$

問題１７．ある企業はポイント制の年金制度を実施している。以下の【制度内容】、【基礎率等】の場合の標準保険料率を求める。下の空欄に当てはまる適切な式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、番号の異なる空欄に同じ式が当てはまることもあるものとする。（８点）

【制度内容】

・ポイント

付与ポイント　　　　　：t 年目のポイント（P_t）は $P_t = t$ （加入した年を 1 年目とする）

ポイントの付与時期　　：年 1 回期末

ポイント単価　　　　　：1 円

・仮想個人勘定残高　　：加入期間中の毎期末に付与されるポイントにポイント単価を乗じた額（以下、ポイントにポイント単価を乗じた額を付与することを「持分付与」という）と、前期末の仮想個人勘定残高に再評価率 $j\,(j > 0)$ で付利（以下、再評価率 j で付利することを「利息付与」という）した額の合計額（1 年目の「前期末の仮想個人勘定残高は」0 とする）

・年金

年金の支給要件　　　　：定年退職

年金の支給開始時期　　：x_r 歳（定年年齢と同じ）

年金の種類　　　　　　：年 1 回期初払いの 20 年保証終身年金

年金額の計算方法　　　：年金の支給開始時の仮想個人勘定残高
÷　年 1 回期初払い 20 年の確定年金現価率（$\ddot{a}_{\overline{20|}}$）

・脱退一時金

脱退一時金の支給要件　：定年退職以外

脱退一時金の額　　　　：脱退時の仮想個人勘定残高

・制度への加入年齢　　：x_e 歳（$x_e < x_r$）

・制度への加入時期　　：年 1 回期初

・定年年齢　　　　　　：x_r 歳

・制度からの脱退時期　：年 1 回期末（死亡脱退は発生しない）
（期初に $x_r - 1$ 歳の被保険者は、その期末に、中途脱退または定年により、全員が脱退する）

・保険料の払い込み時期：年 1 回期初（保険料を払い込む最終年齢は $x_r - 1$ 歳とする）

※期初には「新規加入→保険料の払い込み」の順番で発生する。

期末には「利息付与→持分付与→脱退（定年脱退を含む）」の順番で発生する。

【基礎率等】

・財政方式　　　　　　：加入年齢方式（加入年齢 x_e 歳）

・保険料の計算方法　　：期末に付与されるポイント×ポイント単価×標準保険料率

・予定利率　　　　　　：i

・給付利率　　　　　　：i

・予定脱退率　　　　　：q　（年齢によらず一定）

・加入中の死亡による脱退は発生しないものとする

・$v = \frac{1}{1+i}$

・$p = 1 - q$

（1）x_e 歳の被保険者について、給与現価 G を求める。

$$G = \sum_{t=1}^{x_r - x_e} \left(\boxed{\quad ① \quad} \right)^{t-1} \cdot t$$

$$= \frac{1 - (vp)^{x_r - x_e}}{(1 - vp)^2} - \frac{(x_r - x_e) \cdot (vp)^{x_r - x_e}}{\boxed{\quad ② \quad}}$$

（2）x_e 歳の被保険者について、定年による脱退の給付現価 S_1 を求める。

$$S_1 = (vp)^{x_r - x_e} \cdot \sum_{s=1}^{x_r - x_e} s \cdot (1+j)^{\boxed{\quad ③ \quad}} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{20|}}} \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{20|}} + \frac{N_{x_r + 20}}{D_{x_r}} \right)$$

$$= (vp)^{x_r - x_e} \cdot \left\{ \frac{1+j}{j^2} \cdot \left((1+j)^{x_r - x_e} - 1 \right) - \frac{x_r - x_e}{j} \right\} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{20|}}} \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{20|}} + \frac{N_{x_r + 20}}{D_{x_r}} \right)$$

（3）x_e 歳の被保険者について、中途脱退の給付現価 S_2 を求める。

$$S_2 = \sum_{t=1}^{x_r - x_e} v^t \cdot p^{t-1} \cdot q \cdot \sum_{s=1}^{t} s \cdot (1+j)^{\boxed{④}}$$

$$= \sum_{t=1}^{x_r - x_e} v^t \cdot p^{t-1} \cdot q \cdot \left\{ \boxed{⑤} - \frac{t}{j} \right\}$$

$$= \frac{q}{p} \sum_{t=1}^{x_r - x_e} \left[\frac{1+j}{j^2} \left\{ \boxed{⑥} \right\}^t - \frac{1+j}{j^2} (vp)^t - \frac{1}{j} \cdot t \cdot (vp)^t \right]$$

$$= \frac{q}{p} \left[\frac{1+j}{j^2} \cdot \frac{\boxed{⑥} \left\{ 1 - \left\{ \boxed{⑥} \right\}^{x_r - x_e} \right\}}{1 - \boxed{⑥}} \right.$$

$$- \frac{1+j}{j^2} \cdot \frac{vp \left\{ 1 - \boxed{⑦} \right\}}{1 - vp}$$

$$\left. - \frac{1}{j} \cdot \left\{ \frac{vp \left\{ 1 - (vp)^{x_r - x_e} \right\}}{(1 - vp)^2} - \frac{(x_r - x_e) \cdot \boxed{⑧}}{1 - vp} \right\} \right]$$

（4）標準保険料率は、S_1、S_2、G を用いて、

$$\frac{S_1 + S_2}{G}$$

により算出される。

問題１８．定常状態に達している以下の年金制度がある。以下の空欄にあてはまる適切な数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、解答にあたって、1 人あたりの標準保険料は小数第 1 位を四捨五入して円単位、標準保険料の総額、給付総額および責任準備金は百万円未満を四捨五入して百万円単位とする。⑦の解答にあたっては小数第 6 位を四捨五入しなさい。また、必要であれば、以下の【諸数値】を使用しなさい。（８点）

【制度内容】

・年金の支給要件　：定年による脱退
・年金の支給開始時期　：60 歳（定年年齢と同じ）
・年金の種類　：年 1 回期初払いの 10 年確定年金
・年金額の計算方法　：加入年数（1 年未満切捨て）×1,000 円
÷10 年確定年金現価率（給付利率 2.0%、年 1 回期初払い）
・制度への加入年齢　：55 歳
・制度への加入時期　：年 1 回期初
・定年年齢　：60 歳
・制度からの脱退時期　：年 1 回期初（死亡脱退は発生しない）
（期初に 59 歳の被保険者は期初に一部の被保険者が中途脱退、その期末に定年により残りの被保険者が脱退する）
・保険料の払い込み時期　：年 1 回期初（保険料を払い込む最終年齢は 59 歳とする）
※期初には「新規加入→保険料の払い込み→中途脱退」の順番で発生する。
期末には「加入年数に 1 年を加算→定年脱退」の順番で発生する。

【基礎率等】

・財政方式　：加入年齢方式（加入年齢 55 歳）
・保険料の計算方法　：被保険者 1 人当たりの標準保険料×人数
・新規加入者数と加入年齢：毎年 161,051 人、55 歳
・予定利率　：2.0%
・予定脱退率　：すべての年齢で $\frac{1}{11}$

【諸数値】

・$v = \frac{1}{1+i} = 0.9804$　・$v^5 = 0.9057$
・$\sum_{k=0}^{4} (\frac{10}{11})^k = 4.1699$　・$\sum_{k=0}^{4} (\frac{10}{11} \times v)^k = 4.0246$
・$\sum_{k=0}^{4} k \times (\frac{10}{11})^k \times \frac{1}{11} = 0.6862$　・$\sum_{k=0}^{4} k \times (\frac{10}{11} \times v)^k \times \frac{1}{11} = 0.6480$
・年 1 回期初払いの 10 年確定年金現価率(予定利率：2.0%)：9.1622

（1）上記の年金制度の 1 年間の標準保険料の総額は ① 百万円、1 年間の給付総額は ② 百万円となり、これらの値（百万円単位の値）および極限方程式を用いると、責任準備金は ③ 百万円となる。

（2）（1）に加え、中途脱退者に「加入年数（1 年未満切捨て）×1,000 円」の一時金を中途脱退の直後（期初）に支給するものとし、定常状態に達した年金制度を考える。その場合、1 年間の標準保険料の総額は ④ 百万円、1 年間の給付総額は ⑤ 百万円となり、これらの値（百万円単位の値）および極限方程式を用いると、責任準備金は ⑥ 百万円となる。

（3）（2）において、定年年齢は変えないまま、被保険者の年金の支給開始年齢を 65 歳に変更する制度変更を行い、年金受給権者は従前の給付のままとした。死亡は 65 歳まで発生しないものとする。1 人あたりの標準保険料（端数処理前）が全く変わらないように年金給付額を変更する場合、年金額は変更前の ⑦ 倍となる。

（4）（3）の制度変更において、定常状態に達した場合、責任準備金は一定となり、その額は、（1）～（3）と同様に極限方程式を用いて算出すると、 ⑧ 百万円となる。

問題１９．脱退率q_x（$x_e \le x \le x_r - 1$）に対し、新たな脱退率$\tilde{q}_x$を

$$\tilde{q}_x = \frac{1}{3}\sum_{y=x-1}^{x+1} q_y \ (x_e < x < x_r - 1)$$

$\tilde{q}_{x_e} = q_{x_e}$ 、$\tilde{q}_{x_r-1} = q_{x_r-1}$

として定義することを「スムージング」とよぶ。

Trowbridge モデルの年金制度において、予定脱退率以外は同じ条件の下、q_xを予定脱退率として算出した被保険者 1 人あたりの標準保険料の年額をP、q_xをスムージングした$\tilde{q}_x$を予定脱退率として算出した被保険者 1 人あたりの標準保険料の年額を$\tilde{P}$と表記する。

この年金制度およびq_xが以下の【前提】を満たすとき、(１)、(２) の不等式が成り立つことを示せ。（８点）

（１） $\tilde{q}_x \le q_x$（$x_e \le x \le x_r - 1$ ）

（２） $P \le \tilde{P}$

【前提】

- 財政方式は加入年齢方式で、加入年齢はx_e歳、定年年齢はx_r歳
- 定年到達前の脱退事由は生存脱退のみで、生存脱退による予定脱退率としてq_xまたは$\tilde{q}_x$を用いる
- $x_e \le x \le x_r - 1$において$q_x < 1$である
- 脱退率q_xは$x_e < x < x_r - 1$において上に凸（$q_{x+1} - q_x \le q_x - q_{x-1}$）である
- 保険料の払い込み、給付の支払い、新規加入および定年による脱退は年 1 回期初に発生し、期初に発生する順番は、「新規加入→定年による脱退→当該脱退者を含む給付の支払い→保険料の払い込み」とする
- 生存脱退は各期末に発生するものとする

問題２０．次の年金制度について以下の問に答えよ。なお、解答にあたっては計算過程も記載せよ。（８点）

【制度内容】

決算年度	期初：4 月 1 日、期末：3 月 31 日
加入期間	加入日～脱退日（加入日の前日を以て 1 年に達するものとする）
支給対象者	定年退職者（定年年齢：60 歳）
給付算定式	年金年額 ＝ 給与×加入期間（満年数）
支給内容	10 年確定年金（年 1 回期初払）
加入時期	年 1 回期初加入
昇給時期	年 1 回期初昇給
脱退時期	中途退職による脱退は年 1 回期末に発生し、定年退職による脱退は 60 歳に到達した直後の期初に発生する。 なお、死亡による脱退は発生しない。
財政方式	加入年齢方式（加入年齢：55 歳）
保険料の払い込み時期	年 1 回期初払い込み（保険料＝給与×標準保険料率）
予定利率	2.0%
10 年確定年金現価率	9.1622

【前提】

・期初の払い込み等の発生する順：定年退職による脱退→昇給→新規加入者の加入→保険料の払い込み
・期初の支払い等の発生する順：定年退職による脱退→当該脱退者を含む年金の支払い
・特別保険料は払い込みしていない

【基礎率】

期初年齢	脱退率	期初残存数	期中脱退数	給与指数
55	0	100,000	0	1.0000
56	0	100,000	0	1.1000
57	1/4	100,000	25,000	1.2100
58	1/3	75,000	25,000	1.3310
59	0	50,000	0	1.4641
60	-	50,000	-	-

（１） 当該年金制度の標準保険料率を求めよ。計算結果にパーセント単位で小数第 2 位以下の端数が生じた場合、小数第 2 位を四捨五入しなさい。

（２） 期末時点における加入期間別給付現価率および給与現価率を算定すると下表のとおりとなる。このとき、空欄（A）および（B）に入る現価率を求めよ。端数が出る場合は、計算過程において端数処理はせず、最後に小数第 5 位以下の端数が生じた場合、小数点第 5 位を四捨五入しなさい。

【期末時点（中途脱退による脱退直後）における加入期間別給付現価率および給与現価率】

対象者	加入期間別給付現価率				
	1 年	2 年	3 年	4 年	5 年
55 歳で加入した者	（A）	28.7288	35.5192	49.4040	45.8110
56 歳で加入した者	22.9830	28.4154	39.5232	36.6488	
57 歳で加入した者	21.3115	29.6424	27.4866		
58 歳で加入した者	19.7616	18.3244			
59 歳で加入した者	9.1622				

対象者	加入期間別給与現価率				
	1 年	2 年	3 年	4 年	5 年
55 歳で加入した者	（B）	2.6294	1.8909	1.1000	0.0000
56 歳で加入した者	2.6294	1.8909	1.1000	0.0000	
57 歳で加入した者	1.8909	1.1000	0.0000		
58 歳で加入した者	1.1000	0.0000			
59 歳で加入した者	0.0000				

（注）給付現価率および給与現価率とは給与 1 に対する給付現価および給与現価である。

（３） 当該年金制度の被保険者が前期末から当期末にかけて下表のとおり推移したとする。前期末および当期末における責任準備金を（１）および（２）において算出した数値および記載の表を用いて算定するとき、当期に発生した差損益について以下の問に答えよ。なお、差益は正の値、差損は負の値とし、いずれでもない場合（「基礎率」どおり推移した場合を含む）は「0」と表記すること。

【前期末の被保険者（中途脱退による脱退直後）】

対象者	前期末時点の加入期間				
	1 年	2 年	3 年	4 年	5 年
55 歳で加入した者	5 人	8 人	6 人	4 人	
	110,000 円	120,000 円	140,000 円	150,000 円	
56 歳で加入した者					
57 歳で加入した者	3 人	2 人			
	130,000 円	130,000 円			
58 歳で加入した者					
59 歳で加入した者					

【期末の被保険者（中途脱退による脱退直後）】

対象者	当期末時点の加入期間				
	1 年	2 年	3 年	4 年	5 年
55 歳で加入した者		5 人	4 人	4 人	4 人
		121,000 円	132,000 円	160,000 円	165,000 円
56 歳で加入した者					
57 歳で加入した者	4 人	1 人	2 人		
	110,000 円	143,000 円	135,000 円		
58 歳で加入した者					
59 歳で加入した者					

（注１）上段は人数合計、下段は 1 人あたりの給与である。なお、各区分の被保険者の給与は同じ金額である。
（注２）当期の新規加入者で中途脱退した者は発生しなかった。
（注３）前期末、当期末ともに期初年齢 55 歳未満の被保険者は存在しない。

① 当期に発生した脱退差（千円未満四捨五入）を求めよ。
② 当期に発生した昇給差（千円未満四捨五入）を求めよ。
③ 当期に発生した新規加入差（千円未満四捨五入）を求めよ。

以上