保険数理（問題）

問題 1 次の（1）から（9）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい答えを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。なお、解答にあたって必要であれば別紙（数表）を用いよ。(20 点)

（1）X_1，X_2，X_3は、次の分布関数をもつ離散分布から復元抽出された確率標本であるとする。

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & (x=0)\\[2ex] \dfrac{2}{3} & (x=1)\\[2ex] 0 & (x\neq 0,1)\end{cases}$$

このとき、$Y=X_1X_2X_3$の積率母関数$M(\theta)$は次のうちどれか。

（ア）$1+2e^{\theta}$　（イ）$\dfrac{19}{27}+\dfrac{8}{27}e^{\theta}$　（ウ）$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}e^{\theta}\right)^3$　（エ）$\dfrac{1}{27}+\dfrac{8}{27}e^{3\theta}$　（オ）$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}e^{3\theta}$

（2）確率分布XおよびYは、それぞれ値0と1をとる。

結合確率分布（X, Y）が、

Y＼X	0	1
0	0.800	0.050
1	0.025	0.125

と与えられているとき、$Var(Y|X=1)$に最も近い値は次のうちどれか。

（ア） 0.13　（イ） 0.15　（ウ） 0.20　（エ） 0.51　（オ） 0.71

（3）確率密度関数が次の式で与えられている。

$$f(x|\theta)=\frac{2x}{\theta^2}\qquad (0\leq x\leq\theta)$$

このとき、$d(X)=aX$ がθの不偏推定量となるようなaは次のうちどれか。

（ア）$\dfrac{1}{2}$　（イ）$\dfrac{2}{3}$　（ウ）$\dfrac{3}{4}$　（エ）$\dfrac{4}{3}$　（オ）$\dfrac{3}{2}$

（4）正規母集団$N(\mu,4)$から取り出された大きさ５の標本が

3.46、　-0.24、　2.85、　1.13、　-3.54

であるとき、母数μの９５%信頼区間は（ $\boxed{①}$, $\boxed{②}$ ）である。

（ア）-1.03　（イ）-1.00　（ウ）-0.97　（エ）-0.94　（オ）-0.91
（カ）2.43　（キ）2.46　（ク）2.49　（ケ）2.52　（コ）2.55

（5）ある地方都市では、台風、火災および盗難による損失額が、各々平均値1.0、1.5、3.0の独立な指数分布に従うことがわかっている。これらの年間損失の最大となるものが３を超える確率は次のうちどれか。ここで、$e=2.718$とする。

（ア）0.29　（イ）0.35　（ウ）0.41　（エ）0.48　（オ）0.56

（6）次の①から⑤のうち$\dfrac{1}{k}$に等しいものはいくつあるか。

① $s^{(k)}_{\overline{n+\frac{1}{k}}|}-\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|}$　② $s^{(k)}_{\overline{1}|}s_{\overline{n}|}-\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n-\frac{1}{k}}|}$　③ $s^{(k)}_{\overline{1}|}a_{\overline{n}|}-\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n+\frac{1}{k}}|}$　④ $\ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{\overline{n}|}-a^{(k)}_{\overline{n-\frac{1}{k}}|}$　⑤ $a^{(k)}_{\overline{1}|}\ddot{s}_{\overline{n}|}-s^{(k)}_{\overline{n+\frac{1}{k}}|}$

（ア）１つ　（イ）２つ　（ウ）３つ　（エ）４つ　（オ）５つ

（7）死力が年齢に関係なく0.15、利力が0.05のとき、$(\overline{I}\overline{a})_x$の値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）25　（イ）35　（ウ）45　（エ）55　（オ）65

（8）A_x=0.57525、A_{x+1}=0.58491、q_x=0.00442 のとき、予定利率iの値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）4.0%　（イ）3.5%　（ウ）3.0%　（エ）2.5%　（オ）2.0%

（9）x歳加入、保険期間n年で保険期間満了時に生存していれば保険金１を支払い、死亡すればその保険年度末にその時点の責任準備金を支払う保険を考える。このとき、この保険の全期払込年払純保険料は次のうちどれか。

（ア）$\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$　（イ）$\dfrac{v^n}{a_{\overline{n}|}}$　（ウ）$\dfrac{v^{n+1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$　（エ）$\dfrac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　（オ）$\dfrac{1}{s_{\overline{n}|}}$

問題２　次の（１）から（９）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、解答にあたって必要であれば別紙（数表）を用いよ。(48 点)

（１）サッカーワールドカップの一次リーグは勝った場合（○）勝ち点３、引き分けの場合（△）勝ち点１、負けた場合（●）勝ち点０が与えられ、勝ち点の多い順に２チームが決勝トーナメントに進出できる。

第２戦が終了した時点の結果は以下のとおりであった。

	日本	ベルギー	ロシア	チュニジア	勝ち点
日本	―	△	○		4
ベルギー	△	―		△	2
ロシア	●		―	○	3
チュニジア		△	●	―	1

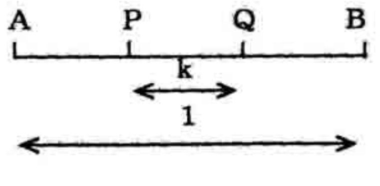
このとき、日本が１位で決勝トーナメントに進出する確率は［　①　］である。

また、日本が２位で決勝トーナメントに進出する確率は［　②　］である。

ただし、各チームの実力は互角で、勝ち、負け、引き分けの確率は$\frac{1}{3}$、勝ち点が同じ場合は抽選が行われ、同勝ち点内でそれぞれの順位になる確率は均等とする。

（２）長さ１の線分ＡＢ上に２点Ｐ, Ｑを任意に選ぶ。Ｐ, Ｑはどの位置に選ばれるのも同様に確からしいとするとき、線分ＰＱの長さがｋ以下である確率が$\frac{1}{3}$であるという。

このときｋは［　　］である。



（３）ある洗剤を使用している消費者の比率を推定したい。次の場合、少なくとも何個の標本が必要か。（標本数は十分に大きいと考えてよい。）

母集団比率pは 0.8 と 0.9 の範囲にあることがわかっていて、少なくとも 99%の確率で、標本比率$\hat{p}$と母集団比率pとの差を 0.02 以下にしたい場合、［　①　］個の標本が必要である。

母集団比率pについて何もわかっていなくて、少なくとも 95%の確率で、標本比率$\hat{p}$と母集団比率pとの差を 0.03 以下にしたい場合、［　②　］個の標本が必要である。

（4）正規分布$N(\mu,9)$に従う母集団から大きさ９の標本を抽出し、
帰無仮説Ｈ０：$\mu=10$、対立仮説Ｈ１：$\mu=12$　を有意水準５％で検定したい。

その際、第２種の誤りの起こる確率が最小になるように棄却域を定めるとすれば、棄却域は

①　である。また、この検定における第２種の誤りの起こる確率は　②　である。

なお、解答にあたっては小数点以下第３位を切上げよ。

（5）某社のある製品ロット平均寿命は5,000時間（以内）であることが望まれている。
いま、一つのロットから５個の製品をとり出して寿命を調べたところ、次のとおりであった。

3,400時間　　4,500時間　　5,800時間　　7,100時間　　7,500時間

このロットの平均寿命は5,000時間（以内）とみなせるかを調べるとして、次の空欄を埋めよ。
ただし、寿命分布は指数分布にしたがうものとする。

標本の平均　①　に対し、有意水準5%での検定を行う場合の採択域は　②　と

③　との間と考えられるため、平均寿命は5,000時間（以内）と　④　。

（6）５％の不良品を含んでいる製品1,000個の中からｎ個を無作為に取り出したとき、不良率が区間［1%、9%］内にある確率を95%より大きくするためには少なくともｎはいくらでなければいけないかを、チェビシェフの不等式を用いて定める。以下の空欄を埋めよ。

この1,000個の中から１個を取り出したとき、それが不良品であれば１、良品であれば０とする確率変数Ｘを考える。

Ｘの平均は$\mu=0.05$、分散は$\sigma^2=0.0475$

ｎ個の標本についてＸと同様な確率変数$X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n$を考えればその和はｎ個の標本中の不良品の数である。

したがって、$\overline{X}=\dfrac{(X_1+X_2+\cdot\cdot\cdot+X_n)}{n}$は標本中の不良率である。

$\overline{X}$の平均と分散は、$E(\overline{X})=0.05$　，　$\sigma_{\overline{X}}^{\ 2}=V(\overline{X})=\boxed{①}\times\dfrac{0.0475}{n}$

不良率が［１％、９％］内にあることはチェビシェフの不等式により、

$P(|\overline{X}-0.05|\leq\lambda\,\sigma_{\overline{X}})>\boxed{②}$

$\lambda\,\sigma_{\overline{X}}=0.04$、$\boxed{②}=0.95$　とおけばよい。

これより$\lambda=\boxed{③}$　（小数点以下第３位を四捨五入）

$\lambda\,\sigma_{\overline{X}}=\boxed{③}\times\sqrt{①\times\dfrac{0.0475}{n}}\leq 0.04$

これをといてｎは少なくとも　④　個でなければいけない。

（7）ある保険会社が地震保険を提供している。年間保険料は平均値 2 の指数分布により、また年間クレーム額は平均値 1 の指数分布により設計されている。保険料とクレーム額は独立である。Xを保険料に対するクレーム額の比率とするとき、Xの確率密度関数は、

$f(x) = \boxed{}$　（$0 < x < \infty$）である。

（8）ある保険会社は団体毎の個別実績ロスデータを用いた団体別料率の算出準備として、団体毎のデータに全信頼度を与える基準の導入を検討している。導入の前提として、

・年間クレーム件数Nはポアソン分布に従う。

・各クレーム額Xは、$\alpha = 9$,　$\beta = 0.5$　のガンマ分布（密度関数は $f(x) = \dfrac{0.5^9}{\Gamma(9)} x^8 e^{-0.5x}, x > 0$）に従う。

・団体毎の年間クレーム総額Tが 90%の確率で真の期待値の±5%の範囲内にあれば全信頼を与える。

を想定している。
このとき、保険会社は料率算定に使用する団体毎の年間クレーム総額Tに全信頼を与えるための基準として、団体毎の年間クレーム件数を有限変動信頼性理論によって求めると、

$\boxed{}$　（小数点以下切捨）である。

なお、Tは正規近似できるとしてよい。

（9）単位期間のクレーム発生件数が平均λのポアソン分布に従い、各クレームが一定の免責額を超える(つまり保険会社が保険金を支払う)確率がpであるものとする。クレームの発生および各クレームの額が独立であるとき保険金の支払いのあるクレームの発生件数をNとすると、

P（N＝n）＝ $\boxed{}$　である。

問題３　次の（１）から（６）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。(32 点)

（１）債務額をm年で返済するローン（年末払）があり、次の２つの返済方法が選択できる。

A：年利率jでの元利均等方式により返済

B：毎年、当初の債務額の$\frac{1}{m}$に、その年始の未支払額に対する年利率iの利息を加えて返済

A、Bいずれの方法を選択しても返済総額が等しいとき、iを利率jのm年期末払年金現価率$a(m,j)$ およびmで表すと、$i=$ $\boxed{①}$ である。

$m=5$、$j=3\%$の場合、$i=$ $\boxed{②}$ %であり、

$m=1$、$j=2\%$の場合、$i=$ $\boxed{③}$ %である。(小数点以下第３位を四捨五入)

（２）定常社会で$\mu_x=\dfrac{k}{a-x}$　$(0\le x<a\,,k>0)$のとき、

${}_tp_x=$ $\boxed{①}$

総人口$=l_0\times$ $\boxed{②}$　（但し、l_0 は出生数）

平均年齢　$=$ $\boxed{③}$　である。

ただし、空欄内は　$x\,,t\,,a\,,k$　以外の記号を使用しないこと。

（３）μ_xが年齢に関係なくμ（一定）であるとする。

このとき、$e^{-\mu}$をe_xで表すと、$e^{-\mu}=$ $\boxed{①}$ である。

また、vをa_∞で表すと、$v=$ $\boxed{②}$ であるから、

a_xをa_∞、e_xを用いてあらわすと、$a_x=a_\infty\times$ $\boxed{③}$ である。

（４）　$m\ddot{a}_x+n\ddot{a}_{x+2t}=(m+n)\ddot{a}_{x+t}$　（m、nは正の定数）という関係があるとき、

${}_tV_{x+t}$と${}_{2t}V_x$を${}_tV_x$、m、nで表すと、

${}_tV_{x+t}=$ $\boxed{①}$、${}_{2t}V_x=$ $\boxed{②}$ である。

（5） $P_{x:\overline{n|}} = a$、${}_{t}V_{x:\overline{n|}} = b$、$A_{x:\overline{t|}} = c$、$A^{1}_{x:\overline{t|}} = d$ のとき、

予定利率 i の値を a、b、c、d で表すと、

$$i = \frac{a\,(1-c)}{\boxed{}}$$ である。

（6） （x）、（y）、（z）が同一の生命表に従っており、その生命表には $l_w = 1 - \dfrac{w}{a}$

（$0 \leq w \leq a,\ a > 0$）という関係が成立している。（x）が 10 歳、（y）が 30 歳、（z）が 50 歳、

a=110 のとき ${}_{a-z}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \boxed{}$ （小数点以下第 4 位を四捨五入）である。

別紙(数表)

【標準正規分布の上側 ε 点：u（ε）】

ε	0.363	0.350	0.159	0.100	0.050	0.025	0.023	0.010	0.005
u（ε）	0.350	0.385	1.000	1.282	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576

【自由度 n の χ^2 分布の上側 ε 点：χ_n^2（ε）】

ε	0.975	0.950	0.050	0.025
χ_5^2（ε）	0.83	1.15	11.07	12.83
χ_{10}^2（ε）	3.25	3.94	18.31	20.48

平成15年3月14日

科目	保険数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題1

(1)	(2)	(3)	(4)①	(4)②	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
イ	ウ	オ	ア	ク	エ	ウ	ア	オ	ア

問題2

(1)	① $\frac{29}{54}$	② $\frac{17}{54}$	(2)	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$
(3)	① 2,655	② 1,068	(4) ① 11.65	② 0.37
(5)	① 5,660	② 1,625	③ 10,240	④ みなせる。
(6)	① $\frac{1000-n}{999}$	② $1-\frac{1}{\lambda^2}$	③ 4.47	④ 373
(7)	$\frac{2}{(2x+1)^2}$	(8) 1,202	(9)	$\frac{(p\lambda)^n e^{-p\lambda}}{n!}$

問題3

(1)	① $\left\{\frac{m}{a(m,j)}-1\right\}\times\frac{2}{m+1}$	② 3.06	③ 2
(2)	① $\frac{(x+t-a)^k}{(x-a)^k}$	② $\frac{a}{k+1}$	③ $\frac{a}{k+2}$
(3)	① $\frac{e_x}{1+e_x}$	② $\frac{a_\infty}{1+a_\infty}$	③ $\frac{e_x}{1+a_\infty+e_x}$
(4)	① $\left(\frac{{}_tV_x}{1-{}_tV_x}\right)\frac{m}{n}$	② $\frac{m+n}{n}{}_tV_x$	
(5)	$b(c-d)+d-a(1-c)$		
(6)	0.075		