基礎数理（問題）

問題１ 次の（１）から（１０）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい答えを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (20 点)

（１） ある製品を作る機械が３台あって、それをＡ，Ｂ，Ｃとする。Ａ，Ｂ，Ｃはそれぞれ全体の 60%、30%、10%を生産する。またＡ，Ｂ，Ｃの各機械から生産される製品のうち不良品の割合は 2%、3%、4%である。いま１個の不良品が見つかったとき、それがＡの機械から生産されたものである確率を計算する。
計算値に最も近い値は次のうちどれか。

（ア） 0.39　（イ） 0.43　（ウ） 0.48　（エ） 0.53　（オ） 0.58

（２）硬貨を投げて表が出れば右へ１歩、裏が出れば左へ１歩動くものとする。はじめ原点にいたとして、この硬貨を１０回投げて、原点より４歩以上６歩以内のところにいるかまたは原点にいる確率を求めるとき、計算値に最も近い値は次のうちどれか。

（ア） 0.656　（イ） 0.634　（ウ） 0.601　（エ） 0.568　（オ） 0.531

（３）$X_1, X_2, X_3,$・・・は有限個の値 $S=(S_1, S_2, \cdots, S_r)$ を取るマルコフ連鎖をなす確率変数とする。

$a, b, c \in S$ とするとき $P(X_1=a, X_3=c | X_2=b)$ は次のうちどれか。

（ア） $P(X_1=a | X_2=b) \cdot P(X_3=c | X_2=b)$　（イ） $P(X_1=a | X_2=b)$

（ウ） $P(X_3=c | X_2=b)$　（エ） $\dfrac{P(X_1=a, X_2=b, X_3=c)}{P(X_1=a, X_2=b)}$　（オ） $P(X_2=b)$

（４）蛍光管の寿命時間は、指数分布 $f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$ （$x \geq 0$）に従う。
この蛍光管の寿命時間について、５個のデータ

5.83 , 12.99 , 16.28 , 2.88 , 1.83

が観測されたとき、λ の最尤推定値に最も近い値は次のうちどれか。

(ア) 0.05　(イ) 0.13　(ウ) 1.26　(エ) 3.98　(オ) 7.96

（5）母集団分布の確率密度関数が指数分布 $f(x,\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ （$x\geq 0$）で与えられるとき、大きさｎの標本の標本平均 $\overline{X}$ に対して、$a_n\overline{X}^2$ が θ^2 の不偏推定量となる場合、a_n は次のうちどれか。

(ア) $\dfrac{n}{2n+1}$ (イ) $\dfrac{n}{n+1}$ (ウ) $\dfrac{n}{n-1}$ (エ) $\dfrac{n}{2n-1}$ (オ) $\dfrac{2n}{n^2-1}$

（6）クレーム額が確率変数 X_j、クレーム件数が確率変数 N であるクレーム総額 S

$$S=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_N$$

の期待値 $E(S)$ および分散 $V(S)$ は以下のとおりとなる。

$$E(S)=E(N)\cdot E(X)$$

$$V(S)=E(N)\cdot V(X)+V(N)\cdot E(X)^2$$

ただし、N および各 X_j は、互いに独立であり、X_j は同一の確率分布で $E(X_j)=E(X)$ とする。

このとき、クレーム件数が平均 λ のポアソン分布に従う場合、平均 $E(S)=\lambda\cdot E(X)$ となるが、分散 $V(S)$ は次のうちどれか。

（ア）$\lambda\cdot E(X)^2$ （イ）$\lambda\cdot E(X^2)$ （ウ）$\lambda^2\cdot E(X^2)$ （エ）$\lambda^2\cdot E(X)^2$

（オ）$\lambda V(X)+\lambda^2\cdot E(X)^2$ （カ）$\lambda V(X)+2\lambda^2\cdot E(X)^2$

（7）額面 100 円、償還期間 5 年、年利率 1.5%（半年後開始、年 2 回払）の公債について、利回りが 2.01%となる購入価格に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）98.0322 円 （イ）97.9322 円 （ウ）97.8322 円 （エ）97.7322 円 （オ）97.6322 円

（8）死亡確率が $_tq_x=\dfrac{t}{(\omega-x)}$ （$0\leqq t\leqq\omega-x$）で与えられており、$\mathring{e}_{60}=20$ のとき、

$_{10|}\mathring{e}_{50}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア） 15 （イ） 16 （ウ） 17 （エ） 18 （オ） 19

（９）$a_x = 20.6623$、$p_x = 0.99558$、$A_{x+1} = 0.58491$ のとき、P_x の値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）0.02555　（イ）0.02655　（ウ）0.02755　（エ）0.02855　（オ）0.02955

（１０）　（ｘ）と（ｙ）の死亡率がお互いに独立であり、それぞれの死亡率が、

$q_x = 0.06$、$q_y = 0.10$ のとき、$p_{\overline{xy}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）　0.954　（イ）　0.964　（ウ）　0.974　（エ）　0.984　（オ）　0.994

問題２　次の（１）から（８）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。 (48 点)

（１）大リーグワールドシリーズは４勝したほうが優勝となる。今年度はＹ軍とＭ軍が対戦し第３戦を終えた段階でＹ軍から見た勝敗は以下のとおりだった。

第１戦	第２戦	第３戦
勝	敗	勝

第４戦以降の勝敗はその直前までの対戦成績どおりの確率となる（例えば第５戦の勝敗は第４戦までの対戦成績どおりの確率となる。）としたとき、Ｙ軍が優勝する確率は、[①]、Ｙ軍が優勝したときの試合数の期待値は、[②]である。

（２）ある円の内部でランダムに１点を選ぶ時、その点が円周までの距離より円の中心までの距離の方が近い確率は、[①]である。

この円内で何個かの点を順に選んでいく時、４番目の点が初めて円周より円の中心に近いほうに入る確率は、[②]である。

また、円周より円の中心に近い点を初めて得る確率を９０％以上にするには、少なくとも[③]の点を選ぶ必要がある。

ここで、$\log_{10} 2 = 0.3010$　、$\log_{10} 3 = 0.4771$とする。

（３）確率変数Ｘが$P(X = x) = \dfrac{4}{5^{x+1}}$　$(x = 0,1,2,\cdots\cdots)$　にしたがっている。

このとき積率母関数$M(\theta) = E(e^{\theta X}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x}$ [①] ＝ [②]

したがって平均$E(X) = M'(\theta)\big|_{\theta=0} =$ [③] $\big|_{\theta=0} =$ [④]

$E(X^2) = M''(\theta)\big|_{\theta=0} =$ [⑤] $\big|_{\theta=0} =$ [⑥]

故に分散$V(X) =$ [⑦]

（4）母平均μが既知である正規母集団$N(\mu,\sigma^2)$の標準偏差σを推定するために大きさnの標本を抽出し標本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$によって統計量

$S^* = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2}$ を考えた。

このとき、aS^*がσの不偏推定量となるように、aを次のとおり求める。

確率変数列$X_1,X_2,\cdots,X_n$は互いに独立で、いずれも正規分布$N(\mu,\sigma^2)$にしたがうから、

$T=\dfrac{nS^{*2}}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2$ は $\boxed{①}$ にしたがう。この密度関数は

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{t}{2}}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (t>0)\\ 0 & (t\le 0)\end{cases}$$ である。

$$E(S^*)=\boxed{②}\ \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \boxed{③}\ e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}dt$$

$$=\boxed{②}\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\ \boxed{④}\ dt$$

ここで$y=\dfrac{t}{2}$とおいて変形すると

$$=\boxed{②}\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-y}\ \boxed{⑤}\ dy$$

$$=\boxed{②}\ \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-y}\ \boxed{⑥}\ dy$$

$$=\boxed{②}\ \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\therefore a=\boxed{⑦}$$

（５）袋の中に赤白計１０個の球が入っている。いま、赤球の個数Ｘについて、
帰無仮説 $H_0 : X = 7$ を、対立仮説 $H_1 : X = 3$ に対して、この袋から復元抽出により５個の球を取り出すことにより検定する。
棄却域を $W = \{0,1\}$ とするとき、

（ａ）第１種の誤りを犯す確率は $\boxed{①}$ （小数第４位を四捨五入）である。

（ｂ）第２種の誤りを犯す確率は $\boxed{②}$ （小数第４位を四捨五入）である。

（６）ある試行において、事象 E が起こる確率を p とする。この試行を１０回繰り返して p に関する次の仮説を検定したい。
帰無仮説 $H_0 : 0.4 \le p \le 0.8$、対立仮説 $H_1 : p < 0.4$ または $p > 0.8$
棄却域を $W = \{0,1,9,10\}$ とする。

（ａ）帰無仮説が真のとき、各 $p \quad (0.4 \le p \le 0.8)$ に対して仮説が棄却される確率は
$\boxed{①}$ である。

（ｂ）　（ａ）で、帰無仮説が棄却される確率が最大となる $p \quad (0.4 \le p \le 0.8)$ は
$\boxed{②}$ でありその確率は $\boxed{③}$ （小数第４位を四捨五入）である。

（７）ある採用試験に 10 人の応募があった。応募者の能力は平均が 65 点、標準偏差 10 点の正規分布をしていると考えられる。試験成績の最高点の者が 1 人採用されるとして、

(a)　合格者の成績が 80 点以上となる確率は $\boxed{①}$ （小数第４位を四捨五入）である。

(b)　ある人がこの試験で 80 点取ったとするとこの人が合格する確率は $\boxed{②}$ （小数第４位を四捨五入）である。

(c)　ある人が 90%以上の確率で合格するためには、 $\boxed{③}$ （整数）点以上とる必要がある。

ただし、$\sqrt[9]{0.9} = 0.9884$　とする。

標準正規分布表

ε	0.0668	0.0119	0.0116
u（ε）	1.50	2.26	2.27

（８）ある保険において、下表のように損害額区分別の支払件数統計が得られているとき、損害額の分

布が指数分布にしたがうものとして、この分布の確率密度関数を最尤法を用いて求める。

損害額区分	10 万円以下	10〜20 万円	20〜30 万円	30 万円超	合計
支払件数	45 件	31 件	24 件	0 件	100 件

平均 μ の指数分布にしたがうと考えられる母集団の分布を表す確率密度関数は、

$$f(x;\mu)=\begin{cases} \boxed{\ ①\ } & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

母集団から大きさ n の標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を抽出するとしたとき、これに対応する標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の確率密度関数は、 $\boxed{\ ②\ }$ $(x_j \geq 0)$ となる。

これを尤度関数と考えると、最尤推定量は方程式 $\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\boxed{\ ③\ } \right)=0$ を μ に関して解いたものである。

すなわち μ の最尤推定量 $\hat{\mu}=$ $\boxed{\ ④\ }$ である。

ところで、与えられている統計表において、各損害額区分の中央値をその区分の代表値として平均損害額を求めると、平均損害額＝ $\boxed{\ ⑤\ }$ となるから、この指数分布における μ の最尤推定量は、 $\boxed{\ ⑥\ }$ となる。

したがって求める確率密度関数は

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{\ ⑦\ } & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

である。

問題３　次の（１）から（７）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。 (32 点)

（1）$\dfrac{dv^n}{di}=\alpha$、 $\dfrac{d}{1-d}(Ia)_{\overline{n|}}-\dfrac{a_{\overline{n|}}}{1-d}=\beta$ のとき、予定利率 i が α、β を用いてどのように表されるかを考える。

まず、$\dfrac{dv^n}{di}$ および $\dfrac{d}{1-d}(Ia)_{\overline{n|}}-\dfrac{a_{\overline{n|}}}{1-d}$ を n、v で表すと

$\dfrac{dv^n}{di}=$ ［①］ 、 $\dfrac{d}{1-d}(Ia)_{\overline{n|}}-\dfrac{a_{\overline{n|}}}{1-d}=$ ［②］ である。

題意より $\alpha=$ ［①］ 、$\beta=$ ［②］ であるから、

i を α、β で表すと $i=$ ［③］ である。

（2）ある定常人口の社会で $\mu_x=\dfrac{2}{a-x}\ (0\le x\le a)$、$\mathring{e}_0=40$ のとき、30 歳未満で死亡する者の死亡時平均年齢 M を求める。

まず、l_x と T_x を l_0、x、a で表すと

$l_x=l_0\times$ ［①］ 、 $T_x=l_0\times$ ［②］ ・・・・・（ア）である。

従って、上記(ア）、$\mathring{e}_x$ が l_x、T_x で表されること、および $\mathring{e}_0=40$ より

$a=$ ［③］ （小数第 1 位を四捨五入）である。

次に、30 歳未満で死亡する者の死亡時平均年齢 M を、l_0、l_{30}、T_0、T_{30} で表すと

M＝ ［④］ ・・・・・（イ）である。

上記（ア）の x に 0 と 30 を代入し、さらにその結果を上記（イ）に代入すれば M＝［⑤］歳（小数第 2 位を四捨五入）である。

（3）$l_x=b-a\,x\ \ (0\le x\le \dfrac{b}{a},\quad a,b>0)$ のとき、$A^{1}_{x:\overline{n|}}=$ ［　　］ となる。

ただし、空欄内は ${}_nq_x$、n、v 以外の記号を使用しないこと。

（4）μ_x が年齢に関係なく定数 c に等しいとき、保険金 1 の即時払終身保険の連続払純保険料は、

$P_x^{(\infty)}=$ ［①］ であり、t 年経過後の責任準備金は、${}_tV_x^{(\infty)}=$ ［②］ である。

ただし、空欄内はt、c、δ(利力) 以外の記号は使用しないこと。

（5）　死亡した場合に基本保険金Sに年末の責任準備金を加えて年末に支払う保険期間n年x歳加入の定期保険の一時払保険料を、死亡率$q_x=\mu$(定数)、予定利率iの場合にS、μ、i、nで表すと、

$\boxed{\quad ① \quad}$ である。

基本保険金100万円で保険期間20年、予定利率3.0%、$\mu=0.03$を満たす場合、この一時払保険料は

$\boxed{\quad ② \quad}$ 円（百円未満を四捨五入）である。

（6）$P^{\,1}_{x:\overline{t|}}=0.00381$、$P_{x:\overline{t|}}^{\;\;\,1}=0.18604$、${}_tV_x=0.47131$ のとき P_x の値を求める。

まず、責任準備金の定義（過去法）を用いて${}_tV_x$を$P^{\,1}_{x:\overline{t|}}$、$P_{x:\overline{t|}}^{\;\;\,1}$、$P_x$ で表すと

${}_tV_x=$ $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

これより P_x を求めて値を代入すると、$P_x=$ $\boxed{\quad ② \quad}$（小数第 5 位を四捨五入）

である。

（7）（x）と（y）は同一の生命表 $\{l_z\ ;\ l_z=l_0\cdot(1-\dfrac{z}{\omega})\}$ に属するものとする。（y＜x＜ω）

今後（x）が（y）に先立ち死亡する確率${}_{\omega-x}q^{1}_{xy}$をω、x、yを用いて表すと

$${}_{\omega-x}q^{1}_{xy}=\frac{\boxed{\qquad}}{2(\omega-y)}$$ である。

平成 16 年 3 月 22 日

科目	基礎数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
（ウ）	（エ）	（ア）	（オ）	（イ）	（イ）	（オ）	（イ）	（イ）	（オ）

問題２

（1）	① 0.8	② 5.5		
（2）	① $\frac{1}{4}$	② $\frac{27}{256}$	③ 9	
（3）	① $\frac{4}{5^{x+1}}$	② $\frac{4}{5-e^{\theta}}$	③ $\frac{4e^{\theta}}{(5-e^{\theta})^2}$	
	④ $\frac{1}{4}$	⑤ $\frac{20e^{\theta}+4e^{2\theta}}{(5-e^{\theta})^3}$	⑥ $\frac{3}{8}$	⑦ $\frac{5}{16}$
（4）	① **自由度** n の χ^2 - 分布	② $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	③ $\sqrt{t}$	
	④ $t^{\frac{n-1}{2}}$	⑤ $2(2y)^{\frac{n-1}{2}}$	⑥ $y^{\frac{n-1}{2}}$	⑦ $\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}$
（5）	① 0.031	② 0.472		
（6）	① $(1-p)^{10}+10p(1-p)^9+10p^9(1-p)+p^{10}$			
	② 0.8	③ 0.376		
（7）	① 0.499	② 0.537	③ 88	
（8）	① $\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}$	② $\frac{1}{\mu^n}\exp\left[-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$		
	③ $-n\log\mu-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i$	④ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$		
	⑤ 12.9	⑥ 12.9	⑦ $\frac{1}{12.9}e^{-\frac{x}{12.9}}$	

科目	基礎数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題３

（1）	① $-nv^{n+1}$	② $-nv^{n}$	③ $\dfrac{\beta}{\alpha}-1$
（2）	① $\dfrac{(a-x)^2}{a^2}$	② $\dfrac{(a-x)^3}{3a^2}$	③ 120
	④ $\dfrac{T_0-T_{30}-30l_{30}}{l_0-l_{30}}$	⑤ 14.3	
（3）	$\dfrac{{}_nq_xv(1-v^n)}{n(1-v)}$		
（4）	① c	② 0	
（5）	① $S\cdot\dfrac{\mu}{i}\left[1-\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n\right]$	② 446,300	
（6）	① $\dfrac{P_x-P^{\,1}_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}}$	② 0.0915	
（7）	$x-2y+\omega$		