基礎数理（問題）

問題 1　次の（1）から（8）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい答えを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (20 点)

（1）　２次元正規分布の同時密度関数が

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{11}}\exp\left[\left(-\frac{1}{22}\right)\left\{4(x-3)^2-6(x-3)(y-4)+5(y-4)^2\right\}\right]$$

で与えられるとき、空欄にあてはまるのはどれか。

$E(X)=$ $\boxed{\quad ① \quad}$

$V(X)=$ $\boxed{\quad ② \quad}$

$V(Y)=$ $\boxed{\quad ③ \quad}$

$Cov(X,Y)=$ $\boxed{\quad ④ \quad}$

（ア）	2	（イ）	3	（ウ）	4	（エ）	5	（オ）	6
（カ）	9	（キ）	１１	（ク）	１２	（ケ）	１６	（コ）	２２

（２）確率密度関数が次の式で与えられている。

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

このとき、平均値のまわりの$2r$次のモーメントは次のうちどれか。

（ア） $\dfrac{2}{r\cdot(2r+1)}$　　（イ） $\dfrac{1}{(2r+1)\cdot(2r+3)}$　　（ウ） $\dfrac{2}{(r-1)\cdot(r+1)}$

（エ） $\dfrac{2}{(2r+1)^2}$　　（オ） $\dfrac{2}{(2r-1)\cdot(2r+1)}$　　（カ） $\dfrac{2}{(2r+1)\cdot(2r+2)}$

（キ） $\dfrac{1}{(r-1)^2}$　　（ク） $\dfrac{1}{(r+1)\cdot(r+2)}$　　（ケ） $\dfrac{1}{2r\cdot(2r+1)}$

（３）　次のデータは、ある正規母集団から無作為に抽出した大きさ２０の標本とする。

3.1	4.0	2.9	3.2	5.1	3.6	4.1	3.3	4.0	4.0
4.4	4.3	2.8	3.0	4.2	4.8	4.4	5.0	5.3	4.5

このとき母分散σ^2を信頼度 95%で次のとおり推定する。空欄にあてはまるのはどれか。

標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{20}(3.1+4.0+2.9+\cdots+4.5) = 4.0$　であるから

$nS^2 = (3.1-4.0)^2 + (4.0-4.0)^2 + \cdots + (4.5-4.0)^2 = 11.0$　となる。

したがって、母分散σ^2の 95%信頼区間は、

$$\frac{11.0}{\boxed{①}} \leq \sigma^2 \leq \frac{11.0}{\boxed{②}}$$　となる。

いま、母平均が 3.9 であることが既知になったとき、

$nS_0^2 = (3.1-3.9)^2 + (4.0-3.9)^2 + \cdots + (4.5-3.9)^2 = 11.2$　であるから

母分散σ^2の 95%信頼区間は、

$$\frac{11.2}{\boxed{③}} \leq \sigma^2 \leq \frac{11.2}{\boxed{④}}$$　となる。

（ア）$\chi^2_{20}(0.05)$　（イ）$\chi^2_{20}(0.025)$　（ウ）$\chi^2_{19}(0.05)$　（エ）$\chi^2_{19}(0.025)$
（オ）$t_{20}(0.05)$　（カ）$t_{20}(0.025)$　（キ）$t_{19}(0.05)$　（ク）$t_{19}(0.025)$
（ケ）$\chi^2_{20}(0.95)$　（コ）$\chi^2_{20}(0.975)$　（サ）$\chi^2_{19}(0.95)$　（シ）$\chi^2_{19}(0.975)$
（ス）$t_{20}(0.95)$　（セ）$t_{20}(0.975)$　（ソ）$t_{19}(0.95)$　（タ）$t_{19}(0.975)$
（チ）$F^{20}_{19}(0.05)$　（ツ）$F^{20}_{19}(0.025)$　（テ）$F^{19}_{20}(0.05)$　（ト）$F^{19}_{20}(0.025)$

（４）確率分布 $P(X=k) = \dfrac{a}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$　を持つ確率変数 X に対し、空欄にあてはまるのはどれか。

（ i ）$a = \boxed{①}$

（ii）$P(X \geq 2) = \boxed{②}$

（ア）$1-\dfrac{1}{e}$　（イ）$1-\dfrac{2}{e}$　（ウ）$1-\dfrac{1}{e^2}$　（エ）$1-\dfrac{2}{e^2}$　（オ）$1-\dfrac{1}{2e}$
（カ）$\dfrac{1}{e^2}$　（キ）$\dfrac{2}{e^2}$　（ク）$\dfrac{1}{2e}$　（ケ）$\dfrac{2}{e}$　（コ）$\dfrac{1}{e}$
（サ）$2e^2$　（シ）e^2　（ス）e　（セ）$2e$　（ソ）1

（5）　期間 10 年のローン（年 1 回期末返済）があり、毎年均等額を 10 年間で返済することにしていたが、借入れから 5 回返済した後、6 回目の返済から返済額を増やして当初から 8 年での返済とすることにした。借入れ利率が年 5.0%のとき、返済額の増加割合に最も近いのは次のうちどれか。
ただし、増額後の返済額は毎年均等とする。

（ア）　４３％　（イ）　５１％　（ウ）　５９％　（エ）　６７％　（オ）　７５％

（6）以下の 60 歳加入の一時払保険がある。

・死亡保険金：加入後 3 年間は既払込保険料を、それ以降は終身にわたり保険金 1,000 万円を、死亡年度末に支払う。

・予定事業費：毎年度始に保険契約が継続する限り 2 万円を賦課

このとき、この一時払保険の営業保険料に最も近いのは次のうちどれか。
ただし、計算基数は以下のとおりとする。

x	D_x	C_x	N_x	M_x
60	4,716	46	59,384	1,888
61	4,446	47	54,668	1,843
62	4,188	48	50,222	1,796
63	3,940	50	46,035	1,748

（ア）3,958,000 円（イ）3,961,000 円　(ウ) 3,963,000 円（エ）4,076,000 円（オ）4,079,000 円

（7）P_x ＝0.01888　$\ddot{a}_x$ ＝23.11109　q_x ＝0.0024 のときに A_{x+1} の値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）0.4363　（イ）0.4395　（ウ）0.4427　（エ）0.4459　（オ）0.4491

（8）次の死亡・就業不能脱退残存表において、$q_{60}^{i} = 0.03567$ となるとき　i_{60} の値に最も近いものは次のうちどれか。

x	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}
60	84,312	$\boxed{}$	$\boxed{}$	3,096	$\boxed{}$
61	82,760	1,139	552	3,457	139

（注）就業不能者が回復して就業者集団に復帰することはない。

（ア）　477　（イ）　480　（ウ）　483　（エ）　486　（オ）　489

問題２　次の（１）から（６）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。(48 点)

（１）バレーボールの試合は、どちらか一方のチームが先に３セット勝てば終了する。
１セットでＡチームがＢチームに勝つ確率を p 、負ける確率を q とし、各セットの試合は独立とする。試合が終わるまでのセット数を X とする時、X の確率分布を、p 及び q を用いて表すと、

x	3	4	5
$P(X=x)$	①	②	③

また $p=\frac{1}{2}$ のとき、X の平均 $E(X)$ は ④ であり、分散 $V(X)$ は ⑤ である。

（２）　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で、どれも同じ密度関数 $f(x)$ をもつとき、
$Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ の密度関数 $g(y)$ を $f(x)$ を用いて表わすと

$g(y)=$ ① である。

また、 X_1, X_2 が独立で、同じ密度関数

$$f(x)=\begin{cases} 2-2x & (0<x<1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとき
$Y=\max\{X_1, X_2\}$ の密度関数は ② である。

（３）あるサッカー場では、入場券に１番から L 番までの通し番号を付けて発売しているという。ある日に第三者がランダムに入場者から 30 枚の入場券を抽出して、その番号の和を計算すると 132,000 であった。この日の入場者数 L（＝入場券発行枚数）を 95%の信頼区間で次のように推定するとき、次の空欄を埋めよ。

このサッカー場の L 枚の入場券の番号の平均値を L を用いて表すと ① である。

したがって、$\bar{x}=\frac{132{,}000}{30}=4{,}400$ より、$L=$ ② （小数第１位四捨五入）と推定される。

抽出数 30 枚は入場者数 L に比べて十分小さく、有限修正係数を無視できるため、母集団の分散 σ^2 は L を用いて表すと、$\sigma^2=$ ③

したがって、正規分布を用いて、①を区間推定すると、

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{30}}<\boxed{\quad ① \quad}<\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{30}}$$

$$\therefore \bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{30}}=\boxed{\quad ④ \quad}$$ （小数第１位四捨五入）

$$\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{30}}=\boxed{\quad ⑤ \quad}$$ （小数第１位四捨五入）

よって、L の 95%信頼区間は（ $\boxed{\quad ⑥ \quad}$, $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ ）

（４）平均値の検定について、母分散が既知の場合と未知の場合について、次のように考えた。
①～④及び⑥～⑧については、適切な数値を記入し、⑤と⑨については、適切な文言を選択せよ。

ある機械が袋に詰める砂糖の重さは、平均 $\mu=100$ g、標準偏差 $\sigma=5$ g の正規分布に従うよう調整される。機械が正しく調整されているかどうかを確かめるために、9 個の袋の無作為標本をとって砂糖の重さを量ったら、次のような結果を得た。

99.9	101.2	103.8	104.8	104.5	100.3	98.7	105.4	103.0

この機械が正しく調整されているかを、有意水準 5%で検定する。
この機械が詰める袋の中の砂糖の重さを X とすると、X は正規分布 $N(\mu,5^2)$ に従う。
機械が調整されているという帰無仮説を調整はうまくいっていないという対立仮説に対して行う検定であるから、両側検定である。よって、

帰無仮説 H_0 ： $\mu=100$　　　対立仮説 H_1 ： $\mu\neq100$

標本個数 $n=9$、母分散 $\sigma^2=5^2$ で、標本平均 $\bar{x}=\boxed{\quad ① \quad}$ g（小数第２位四捨五入）であるから、

$$A=\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\boxed{\quad ② \quad}}}}=\boxed{\quad ③ \quad}$$ （小数第４位四捨五入）

有意水準が 5%であるから、棄却域は、 $A>\boxed{\quad ④ \quad}$ となる範囲

⑤
ア：したがって③＜④となり、仮説は選択され、この機械は正しく調整されていると判断される。
イ：したがって③＞④となり、仮説は棄却され、この機械は正しく調整されていないと判断される。

次に、母分散σ^2が未知の場合を検定する。

機械が調整されているという帰無仮説を調整はうまくいっていないという対立仮説に対して行う検

定であるから、上記と同様に両側検定である。よって、

帰無仮説H_0： $\mu=100$　　　対立仮説H_1： $\mu\neq100$

標本個数$n=9$で、標本平均$\bar{x}=$ $\boxed{①}$ gより、標本分散$u^2=5.253$であるから、

$$B=\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\dfrac{u^2}{\boxed{⑥}}}}=\boxed{⑦}$$ （小数第４位四捨五入）

有意水準が５％であるから、棄却域は、$B>$ $\boxed{⑧}$ となる範囲

⑨

ウ：したがって⑦<⑧となり、仮説は選択され、この機械は正しく調整されていると判断される。

エ：したがって⑦>⑧となり、仮説は棄却され、この機械は正しく調整されていないと判断される。

確率分布については、次の数値を使用すること

標準正規分布	$z_{0.05}=1.645$	$z_{0.025}=1.960$	$z_{0.01}=2.326$	$z_{0.005}=2.576$
t分布（自由度 7）	$t_{0.05}=1.895$	$t_{0.025}=2.365$	$t_{0.01}=2.998$	$t_{0.005}=3.499$
（自由度 8）	$t_{0.05}=1.860$	$t_{0.025}=2.306$	$t_{0.01}=2.896$	$t_{0.005}=3.355$
（自由度 9）	$t_{0.05}=1.833$	$t_{0.025}=2.262$	$t_{0.01}=2.821$	$t_{0.005}=3.250$
（自由度 10）	$t_{0.05}=1.812$	$t_{0.025}=2.228$	$t_{0.01}=2.764$	$t_{0.005}=3.169$

（５）大リーガーＩ選手の打率は 0.375（$=\dfrac{3}{8}$）であるとする。Ｉ選手が 95%以上の確率で 262 安打以上を打つために必要な打数を求める。

必要な打数をｎとするとＩ選手の安打数は平均 $\boxed{①}$ 、分散 $\boxed{②}$ の二項分布に従う。

打数は十分大きいため、正規分布$N(\boxed{①},\boxed{②})$で近似することができる。

したがって$P(X\geq262)=P(Z\geq\boxed{③})\geq0.95$

ゆえに $\boxed{③}\leq-1.645$

これより　$3n-\boxed{④}\sqrt{15n}-\boxed{⑤}\geq0$

$\sqrt{n} \geq 0$　となるので

$\sqrt{n} \geq$ $\boxed{⑥}$　（小数第４位四捨五入）

$n \geq$ $\boxed{⑦}$　（小数第４位四捨五入）

答え　$\boxed{⑧}$ 打数以上

（６）　パラメーターλのポアソン過程に従うクレーム件数過程$\{N_t\}$に対して

T_n＝（n回目のクレームが発生する時刻）

として定義される確率変数T_nの確率密度関数を次のとおり求める。

$P(T_n \leq t) = P($ 期間［$0, t$］におけるクレーム発生件数がn件以上 $)$

$$= e^{-\lambda t} \ \{\sum_{k=n}^{\infty} \boxed{①}\}$$

であるから密度関数は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P(T_n \leq t)\right) = -\lambda e^{-\lambda t} \ \{\sum_{k=n}^{\infty} \boxed{①}\} + e^{-\lambda t} \ \{\sum_{k=n}^{\infty} \boxed{②}\}$$

$$= e^{-\lambda t} \boxed{③}$$

となる。

なお、③は$\sum$ を用いずに示せ。

問題３　次の（１）から（６）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。 (32 点)

（１） $\mu_x = \dfrac{2}{120-x}$　$(0 \le x < 120)$　のとき、以下の手順で ${}_5p_{30}$、$\overset{\circ}{e}_{60}$ を求める。

$\log l_x = \int \boxed{\quad ① \quad} dx$　であるから、$l_x = A \times \boxed{\quad ② \quad}$　　（A は、積分定数）

したがって、${}_5p_{30} = \boxed{\quad ③ \quad}$（小数第 3 位四捨五入）

$\overset{\circ}{e}_{60} = \int_0^{60} \boxed{\quad ④ \quad} dt = \boxed{\quad ⑤ \quad}$　（小数第 1 位四捨五入）

ただし、①、②、④については、 x, t 以外の記号は使用しないこと。

（２）生存基数 D_x が K^x (K は $0 < K < 1$ なる定数) で表されるとき、

$\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ 及び $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ を K 、n 、δ (= 利力)を用いて表すと、

$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\boxed{\quad ② \quad}}{\boxed{\quad ① \quad}}$　、　$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = (-1) \times \boxed{\quad ② \quad} \times \left(\dfrac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\boxed{\quad ① \quad}} + 1 \right)$　となる。

（３） x 歳加入、n 年満期養老保険（保険料年払かつ全期払込、保険金額 1、保険金期末払）において第 t 保険年度末危険責任準備金を R_t（＝1－${}_tV_{x:\overline{n}|}$ ）としたとき、R_{t+1} を R_t 、$P_{x:\overline{n}|}$ 、p_{x+t} 、v を用いて表すと、

$R_{t+1} = \boxed{\quad ① \quad} \times \left\{ R_t - \boxed{\quad ② \quad} \right\}$　となる。

（4）$l_x = \omega - x \quad (0 \le x \le \omega)$ の定常人口の社会を考える。

この定常人口の平均年齢 $\overline{X}$ を ω を用いて表すと $\boxed{①}$ 歳となる。

次に、ある時以降、この定常人口の社会の出生者数が半分になったとする。

この出生者数が半分になった時から $\dfrac{\omega}{2}$ 年後の平均年齢 $\overline{X'}$ は ω を用いて表すと $\boxed{②}$ 歳となる。

ここで、出生者数が半分になる前の定常人口の社会において、$\mathring{e}_0 = 60$ とすると $\omega = \boxed{③}$（小数第 1 位四捨五入）であるから、①、②に代入すれば出生者数が半分になった時から $\dfrac{\omega}{2}$ 年後の平均年齢 $\overline{X'}$ は、出生者数が半分になる前の平均年齢 $\overline{X}$ に比べて $\boxed{④}$ 歳（小数第 1 位四捨五入）上昇したことになる。

（5） $l_x = l_0\left(1 - \dfrac{x}{\omega}\right)$ （$0 \le x \le \omega$ ）のとき $\mathring{e}_{\overline{xx}}$ を以下の手順で求めたい。

$\mathring{e}_{\overline{xx}}$ を $\mathring{e}_x$、$\mathring{e}_{xx}$ で表すと $\mathring{e}_{\overline{xx}} = \boxed{①} \times \mathring{e}_x + \boxed{②} \times \mathring{e}_{xx}$ となる。

また、$\mathring{e}_x = \boxed{③} \times (\omega - x)$、$\mathring{e}_{xx} = \boxed{④} \times (\omega - x)$ となるため

$\mathring{e}_{\overline{xx}} = \boxed{⑤} \times (\omega - x)$ となる。

ただし、①～⑤には数値を記入すること。

（6）$\overline{A}_w = 0.6$ 、$\overline{A}_{wx}^{\,1} = 0.3$ 、$\overline{A}_{w\overset{1}{x}x} = 0.2$ のとき、$\overline{A}_{wx\overset{3}{x}} = \boxed{}$（小数第 2 位四捨五入）となる。

科目	基礎数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１

(1)				(2)	(3)			
①	②	③	④		①	②	③	④
イ	エ	ウ	イ	カ	エ	シ	イ	コ

(4)		(5)	(6)	(7)	(8)
①	②				
コ	イ	ウ	オ	エ	イ

問題２

(1)	① p^3+q^3	② $3pq(p^2+q^2)$
	③ $6p^2q^2$	④ $\frac{33}{8}$　⑤ $\frac{39}{64}$
(2)	① $n\ f(y)\left(\int_{-\infty}^{y} f(x)dx\right)^{n-1}$	② $4y(y-1)(y-2)\quad (0<y<1)$ $0\quad$（その他）
(3)	① $\frac{L+1}{2}$　② 8,799	③ $\frac{L^2-1}{12}$
	④ 3,491　⑤ 5,309	⑥ 6,981　⑦ 10,617
(4)	① 102.4　② 9	③ 1.440　④ 1.960
	⑤ ア　⑥ 8　⑦ 2.962	⑧ 2.306　⑨ エ
(5)	① $\frac{3}{8}n$　② $\frac{15}{64}n$	③ $\frac{262-\frac{3}{8}n}{\sqrt{\frac{15}{64}n}}$　④ 1.645
	⑤ 2.096　⑥ 27.515	⑦ 757.075　⑧ 758
(6)	① $\frac{(\lambda t)^k}{k!}$　② $\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$	③ $\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

科目	基礎数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題３

(1)	① $\dfrac{-2}{120-x}$	② $(120-x)^2$			
	③ 0.89	④ $\left(\dfrac{60-t}{60}\right)^2$	⑤ 20		
(2)	① $\log K$	② K^n-1	③ δ		
(3)	① $\dfrac{1}{vp_{x+t}}$	② $(P_{x:\overline{n\rceil}}+1-v)$			
(4)	① $\dfrac{\omega}{3}$	② $\dfrac{2\omega}{5}$	③ 120	④ 8	
(5)	① 2	② -1	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{3}$	⑤ $\dfrac{2}{3}$
(6)	0.2				