年金数理(問題)

本問題中では、各問の中で特に断らない限り、以下のとおりとする。

i ：予定利率($i>0$)、 $v=\dfrac{1}{1+i}$ 、 $d=1-v$ 、 δ ：利力。
l_x ：生命表にもとづく x 歳の生存者数、 d_x ：同 x 歳の死亡者数。
x_e ：最低年齢、 x_r ：定年年齢、 ω ：最終年齢。
$l_x^{(T)}$ ：脱退残存表にもとづく(定常状態における) x 歳の在職中の被保険者数($x_e \le x \le x_r$)、
ただし、 $l_{x_r}=l_{x_r}^{(T)}$ 。
$D_x=l_x\cdot v^x$ 、 $D_x^{(T)}=l_x^{(T)}\cdot v^x$ 、 $N_x=\sum_{y=x}^{\omega}D_y$ 、 $\overline{C}_x=d_x\cdot v^{x+\frac{1}{2}}$ 、 $\overline{M}_x=\sum_{y=x}^{\omega}\overline{C}_y$ 。
L ：在職中の被保険者数、 S^f ：将来加入が見込まれる被保険者の給付現価、 S^a ：在職中の被保険者の給付現価(S_{PS}^a ：過去期間分、 S_{FS}^a ：将来期間分)、 S^p ：年金受給権者の給付現価、 $S=S^f+S^a+S^p$ 、
G^f ：将来加入が見込まれる被保険者の人数現価、 G^a ：在職中の被保険者の人数現価、 $G=G^a+G^f$ 、
B ：制度全体の年間給付額、 C ：制度全体の年間保険料。
「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料率を在職中の被保険者全員に適用する方式(特定年齢方式)をいう。「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。

問題 1 から 15 までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題 16 から 20 までは、それぞれの問題の指示にしたがって、解答用紙の所定欄に答案を記せ。また、必要であれば、以下の基数表を使用せよ。

x	l_x	v^x	D_x	N_x	$\overline{C}_x$	$\overline{M}_x$	x	l_x	v^x	D_x	N_x	$\overline{C}_x$	$\overline{M}_x$
60	1025	1.00000	1025.00	15096.02	24.63	601.36	72	725	0.70138	508.50	5906.72	17.28	348.80
61	1000	0.97087	970.87	14071.02	23.92	576.72	73	700	0.68095	476.67	5398.22	16.77	331.52
62	975	0.94260	919.03	13100.15	23.22	552.81	74	675	0.66112	446.25	4921.56	16.29	314.75
63	950	0.91514	869.38	12181.12	22.54	529.59	75	650	0.64186	417.21	4475.30	15.81	298.46
64	925	0.88849	821.85	11311.73	21.89	507.05	76	625	0.62317	389.48	4058.09	15.35	282.65
65	900	0.86261	776.35	10489.88	21.25	485.16	77	600	0.60502	363.01	3668.61	14.90	267.30
66	875	0.83748	732.80	9713.54	20.63	463.91	78	575	0.58739	337.75	3305.60	14.47	252.40
67	850	0.81309	691.13	8980.74	20.03	443.28	79	550	0.57029	313.66	2967.85	14.05	237.93
68	825	0.78941	651.26	8289.61	19.45	423.25	80	525	0.55368	290.68	2654.19	13.64	223.88
69	800	0.76642	613.13	7638.35	18.88	403.81	81	500	0.53755	268.77	2363.51	13.24	210.24
70	775	0.74409	576.67	7025.21	18.33	384.93	82	475	0.52189	247.90	2094.74	12.86	197.00
71	750	0.72242	541.82	6448.54	17.80	366.60	83	450	0.50669	228.01	1846.84	12.48	184.15

注) i =3%、 v^x は $v^{(x-60)}$ の意味、 l_x は83歳以降も25づつ減少して101歳で0となる。

問題１．毎四半期の期末に当初 3 年間は 100 円、次の 3 年間は 200 円を積み立て、7 年経過後の積立金（元利合計）が 4,200 円であったとする。転化回数を年 4 回として、実利率 i に対応する名称利率を $i^{(4)}$ とする。次のうち、正しいものはいくつあるか。ただし、$s_{\overline{n}|i}$ および $a_{\overline{n}|i}$ は利率 i による n 年確定年金の終価率および現価率である。(３点)

① $s_{\overline{12}|\frac{i^{(4)}}{4}} \cdot (1+i)\{(1+i)^3+2\}=42$、 ② $4 \cdot a_{\overline{3}|i^{(4)}} \cdot (1+i^{(4)})^4\{(1+i)^3+2\}=42$、

③ $4 \cdot a_{\overline{3}|i} \cdot \dfrac{i}{i^{(4)}} \cdot (1+i)^4\{(1+i)^3+2\}=42$、 ④ $4 \cdot s_{\overline{3}|i} \cdot s^{(4)}_{\overline{1}|i} \cdot (1+i)\{(1+i)^3+2\}=42$、

⑤ $s_{\overline{12}|i^{(4)}} \cdot (1+i^{(4)})\{(1+i)^3+2\}=42$

(A)1 個、 (B)2 個、 (C)3 個、 (D)4 個、 (E)5 個

問題２．利率を年 3%、返済時期を年 1 回期末とする元利均等返済の融資において、第 5 回目の返済額に占める利息の割合が 0.478 の時、第 10 回目の返済額に占める利息の割合に一番近いものは、次のいずれか。計算には、1 ページの基数表を利用してよい。(３点)

(A)0.446、 (B)0.430、 (C)0.412、 (D)0.395、 (E)0.377

問題３．60 歳における 65 歳支給開始年 6 回期初払いの終身年金現価率 ${}_{5|}\ddot{a}^{(6)}_{60}$ に最も近いものは、次のいずれか。ただし、基数表は 1 ページのものを使用せよ。(３点)

(A)9.792、 (B)9.851、 (C)9.918、 (D)9.978、 (E)10.234

問題４．(x)、(y)、(z) および (w) の 4 生命に対し、以下のような年金を支給するとしたときに、その年金現価に一番近いものは、次のいずれか。(３点)

① 当初 15 年間は、(x)、(y) の生死に関わらず、(z) もしくは (w) のいずれかが生存していれば、1 の年金を期初に支給する

② 16 年目以降は、(z)、(w) の生死に関わらず、(x) もしくは (y) のいずれかが生存していれば、1 の年金を期初に支給する

ただし、

$\ddot{a}_x=15.305$、$\ddot{a}_y=17.232$、$\ddot{a}_z=18.533$、$\ddot{a}_w=18.584$、

$\ddot{a}_{xy}=14.904$、$\ddot{a}_{xz}=15.205$、$\ddot{a}_{xw}=15.211$、$\ddot{a}_{yz}=17.064$、$\ddot{a}_{yw}=17.077$、$\ddot{a}_{zw}=18.230$、

$\ddot{a}_{xyzw}=14.727$、

${}_{15|}\ddot{a}_x=4.937$、${}_{15|}\ddot{a}_y=6.712$、${}_{15|}\ddot{a}_z=7.964$、${}_{15|}\ddot{a}_w=8.016$、

${}_{15|}\ddot{a}_{xy}=4.639$、${}_{15|}\ddot{a}_{xz}=4.893$、${}_{15|}\ddot{a}_{xw}=4.900$、${}_{15|}\ddot{a}_{yz}=6.564$、${}_{15|}\ddot{a}_{yw}=6.578$、${}_{15|}\ddot{a}_{zw}=7.682$、

${}_{15|}\ddot{a}_{xyzw}=4.501$ とする。

(A)17.599、 (B)17.632、 (C)17.885、 (D)18.291、 (E)18.375

問題５．t 年経過までに支給した年金額が $e^{\lambda t}-1$ で与えられる連続払いの年金の、時点 0 での年金現価を表した式は、次のいずれか。ただし、$0<\lambda<\delta$ とする。(３点)

(A) $\dfrac{1}{\lambda-\delta}$、 (B) $\dfrac{\delta}{\lambda-\delta}$、 (C) $\dfrac{\lambda}{\delta}$、 (D) $\dfrac{\delta+\lambda}{\delta-\lambda}$、 (E) $\dfrac{\lambda}{\delta-\lambda}$

問題６．Trowbridge モデルにおける定常状態の給付現価、人数現価を表す式について正しい組み合わせは、次のいずれか。なお、保険料は、年１回期初払いとする。(３点)

(A) $G^a=\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}\cdot\frac{1-v^{y-x_e}}{1-v}$　　$S^a=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{v\cdot\left(1-v^{x_r-x_e}\right)}{1-v}$

(B) $G^a=\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}\cdot\frac{v\cdot\left(1-v^{y-x_e}\right)}{1-v}$　　$S^a=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{v\cdot\left(1-v^{x_r-x_e-1}\right)}{1-v}$

(C) $G^a=\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}\cdot\frac{1-v^{y-x_e+1}}{1-v}$　　$S^a=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{v\cdot\left(1-v^{x_r-x_e}\right)}{1-v}$

(D) $G^a=\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}\cdot\frac{1-v^{y-x_e+1}}{1-v}$　　$S^a=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{1-v^{x_r-x_e}}{1-v}$

(E) $G^a=\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}\cdot\frac{1-v^{y-x_e}}{1-v}$　　$S^a=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{1-v^{x_r-x_e}}{1-v}$

問題７．勤続期間満 t 年で、生存脱退あるいは定年年齢 x_r に到達した者に対して、x_r 歳から年額 $A\cdot t$ の年１回期初払い終身年金を支払う年金制度がある。x_e 歳で加入し x 歳(ただし、$x_e<x<x_r$)で在職中の被保険者１人あたりの給付現価を表す式は、次のいずれか。なお、$d_y^{(w)}$ を満 y 歳で生存脱退した者のうち $y+1$ 歳まで生存した人数とし、$C_y^{(w)}=d_y^{(w)}\cdot v^{y+1}$ とする。(３点)

(A) $\sum_{y=x}^{x_r-1}\frac{C_y^{(w)}}{D_x^{(T)}}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_y}\cdot A\cdot(y-x_e)\cdot\ddot{a}_{x_r}+\frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}}\cdot A\cdot(x_r-x_e)\cdot\ddot{a}_{x_r}$

(B) $\sum_{y=x}^{x_r-1}\frac{C_y^{(w)}}{D_x^{(T)}}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_{y+1}}\cdot A\cdot(y-x_e)\cdot\ddot{a}_{x_r}+\frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}}\cdot A\cdot(x_r-x_e)\cdot\ddot{a}_{x_r}$

(C) $\sum_{y=x}^{x_r-1}\frac{C_y^{(w)}}{D_x^{(T)}}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_{y+1}^{(T)}}\cdot A\cdot(y-x_e)\cdot\ddot{a}_{x_r}+\frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}}\cdot A\cdot(x_r-x_e)\cdot\ddot{a}_{x_r}$

(D) $\sum_{y=x}^{x_r-1}\frac{C_y^{(w)}}{D_x^{(T)}}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_{y+1}}\cdot A\cdot(y-x_e+1)\cdot\ddot{a}_{x_r}+\frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}}\cdot A\cdot(x_r-x_e+1)\cdot\ddot{a}_{x_r}$

(E) $\sum_{y=x}^{x_r}\frac{C_y^{(w)}}{D_x^{(T)}}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_{y+1}}\cdot A\cdot(y-x_e+1)\cdot\ddot{a}_{x_r}+\frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}}\cdot A\cdot(x_r-x_e+1)\cdot\ddot{a}_{x_r}$

問題８．Trowbridge モデルにおいて、保険料の拠出および給付の支払いを年１回期末とした場合、平準積立方式の保険料の算式は、次のいずれか。(３点)

(A) $\frac{N_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^{(T)}}$、(B) $\frac{N_{x_r+1}}{\sum_{y=x_e+1}^{x_r}D_y^{(T)}}$、(C) $\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r+1}}{\sum_{y=x_e+1}^{x_r}D_y^{(T)}}$、(D) $\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^{(T)}}$、(E) $\frac{D_{x_r+1}\cdot\ddot{a}_{x_{r+1}}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^{(T)}}$

問題９．開放型総合保険料方式と開放基金方式の財政再計算における保険料の算出に関する次の記述のうち、正しいものはいくつあるか。なお、繰り越した剰余金は、存在しないものとする。(３点)

①開放基金方式は標準保険料を ${}^{OAN}P=\left(S^f+S_{FS}^a\right)/\left(G^f+G^a\right)$ と定義するが、開放型総合保険料方式は標準保険料と特別保険料の区別なく、保険料を ${}^{O}P=\left(S^f+S^a+S^p-F\right)/\left(G^f+G^a\right)$ と定義する(F は積立金とする)。

②開放基金方式において $S_{PS}^{a}+S^{p}>F$ の場合、$U=S_{PS}^{a}+S^{p}-F$ として特別保険料を $U/\left(G^{f}+G^{a}\right)$ と定める。

③ $S_{PS}^{a}+S^{p}\leq F$ の場合、開放型総合保険料方式と開放基金方式の保険料は等しい。

④開放基金方式において $S_{PS}^{a}+S^{p}<F$ の場合、$\Delta P=\left\{F-\left(S_{PS}^{a}+S^{p}\right)\right\}/\left(L\cdot\ddot{a}_{\overline{N|}}\right)$ として、当初 N 年間の保険料を調整して $\left({}^{OAN}P-\Delta P\right)$ にする(ここで N は償却年数)。

⑤開放基金方式において $S_{PS}^{a}+S^{p}<F$ の場合、$\Delta P=\left\{F-\left(S_{PS}^{a}+S^{p}\right)\right\}/\left(G^{f}+G^{a}\right)$ として保険料を $\left({}^{OAN}P-\Delta P\right)$ に調整する。

(A)1 個、 (B)2 個、 (C)3 個、 (D)4 個、 (E)5 個

問題 10. 定常状態の年金制度で、ある年度以降 n 年間、保険料 C の拠出を停止した。拠出停止によって発生した未積立債務は、$n+1$ 年度以降 n 年の元利均等償却を行うこととした。未積立債務償却期間中の１年あたりの保険料の総額を表わす式は、次のいずれか。(３点)

(A) $\left\{1+(1+i)^{n}\right\}\cdot C$、(B) $(1+i)^{n}\cdot C$、(C) $(1+i)^{2n}\cdot C$、(D) $\dfrac{C}{i}\cdot\left\{(1+i)^{n}-1\right\}$、(E) $\left\{1+(1+i)^{2n}\right\}\cdot C$

問題 11. Trowbridge モデルにおいて、現在年齢 x 歳の被保険者１人あたりの単位積立方式による保険料収入現価を表わす式は、次のいずれか。なお、保険料は年１回期初払いとする。(３点)

(A) $\dfrac{x_r-x+1}{x_r-x_e}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}}$、(B) $\dfrac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}}$、(C) $\dfrac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}}$、

(D) $\dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y^{(T)}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^{(T)}}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}}$、(E) $\dfrac{\sum_{y=x_e}^{x-1}D_y^{(T)}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^{(T)}}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}}$

問題 12. 以下の表は、ある年金制度(保険料期初払い、給付期末払い)の n 年度末および $n+1$ 年度末の貸借対照表、$n+1$ 年度の損益計算書である。$n+1$ 年度の運用利回りが 9.8%であったとき、$n+1$ 年度の利差益に最も近いものは、次のいずれか。なお予定利率は年 2.5%とする。(３点)

n 年度貸借対照表

積立金	48,025	責任準備金	52,054
未積立債務	4,029		
	52,054		52,054

$n+1$ 年度貸借対照表

積立金	□	責任準備金	54,401
		剰余金	□
	□		□

$n+1$ 年度損益計算書

給付金	□	標準保険料収入	4,800
未積立債務減少額	4,029	特別保険料収入	□
剰余金増加額	□	運用収益	□
$n+1$ 年度末責任準備金	54,401	n 年度末責任準備金	52,054
	63,678		63,678

(A)3,518、 (B)3,535、 (C)3,846、 (D)3,921、 (E)3,966

問題 13. 財政再計算の結果、ある年金制度の諸数値が以下のとおりとなった。①加入年齢方式による標準保険料率と特別保険料率の和、②開放基金方式による標準保険料率と特別保険料率の和、③開放型総合保険料方式による保険料率、④閉鎖型総合保険料方式による保険料率の組み合わせに最も近いものは、次のいずれか。なお、保険料は年 1 回期初払い、未積立債務の償却期間は 15 年とする。(3 点)

年金受給権者の給付現価		4,647 百万円
在職中の被保険者の給付現価		9,814 百万円
	うち、将来期間対応分	5,517 百万円
	うち、過去期間対応分	4,297 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給付現価		6,826 百万円
在職中の被保険者の給与現価		35,455 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価		91,375 百万円
積立金		6,000 百万円
在職中の被保険者の給与総額		2,537 百万円
期初払い 15 年確定年金現価率		13.1

(A) ①16.33%、②27.22%、③9.73%、 ④23.86%
(B) ①24.96%、②27.22%、③12.05%、④23.86%
(C) ①24.96%、②18.59%、③9.73%、 ④21.79%
(D) ①24.96%、②27.22%、③9.73%、 ④21.79%
(E) ①16.33%、②18.59%、③9.73%、 ④23.86%
(F) ①24.96%、②18.59%、③12.05%、④23.86%

問題 14. Trowbridge モデルにおいて開放型総合保険料方式を適用している場合、定常状態における年間保険料総額と積立金との関係を表わす式の組み合わせのうち、有り得るものはいくつあるか。なお、保険料は年 1 回期初払いとする。(3 点)

①保険料：$L \cdot {}^{L}P$ 積立金：$S^p + S^a - {}^{L}P \cdot G^a$

②保険料：B 積立金：$S^p - l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$

③保険料：0 積立金：$S^p + S^a + S^f$

④保険料：$v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$ 積立金：S^p

⑤保険料：$l_{x_e}^{(T)} \cdot \dfrac{D_{x_r}}{D_{x_e}^{(T)}} \cdot \ddot{a}_{x_r}$ 積立金：S^f

(A)1 個、 (B)2 個、 (C)3 個、 (D)4 個、 (E)5 個

問題 15. 開放型総合保険料方式で運営されている定常状態の年金制度において、ある年度に保険料を増額して期末の積立金を 2 倍とした。翌年度の 1 人あたり保険料を表す式は、次のうちいずれか。なお、保険料および給付は期初払いとし、積立金(増額前)を F とする。(3 点)

(A) $\dfrac{d \cdot (B - F)}{2 \cdot L}$、(B) $\dfrac{B - 2 \cdot d \cdot F}{d \cdot L}$、(C) $\dfrac{B - d \cdot F}{2 \cdot L}$、(D) $\dfrac{B - d \cdot F}{2 \cdot d \cdot L}$、(E) $\dfrac{B - 2 \cdot d \cdot F}{L}$

問題 16. Trowbridge モデルにおいて保険料を年 1 回期初払いとした制度が、単位積立方式を適用して定常状態にあるものとする。空欄に記号または算式を記入せよ。(12 点)

単位積立方式の 1 人あたり保険料 ${}^{U}P_x$ は保険料拠出時の年齢 x (ただし $x_e \le x < x_r$)に依存して

${}^{U}P_x = \boxed{①} \cdot \dfrac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot \ddot{a}_{x_r}$ で表される。

したがって、定常状態における制度全体の年間保険料 ${}^{U}C$ は、

$$
\begin{aligned}
{}^{U}C &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{U}P_x \\
&= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \boxed{①} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot \ddot{a}_{x_r} \\
&= \boxed{①} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{②} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{I})
\end{aligned}
$$

と表される。

定常状態における積立金額を ${}^{U}F$ とすると、B および ${}^{U}C$ を用いて、

$$
{}^{U}F = \boxed{③} - \boxed{④} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{II})
$$

が成立する。

（II）式の右辺第二項に（I）式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\boxed{④} &= \boxed{①} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \sum_{t=1}^{\boxed{⑤}} \boxed{⑥} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \boxed{⑥} \\
&= \boxed{①} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \left\{ \sum_{t=1}^{\boxed{⑤}} \boxed{⑦} + (x_r - x_e) \cdot \sum_{t=x_r-x_e+1}^{\infty} \boxed{⑥} \right\} \\
&= \boxed{①} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \left\{ \sum_{x=x_e}^{\boxed{⑧}} \boxed{⑨} + (x_r - x_e) \cdot \frac{v^{x_r-x_e+1}}{d} \right\} \\
&= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{⑩} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot v^{x_r-x} + \frac{v}{d} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot v^{x_r-x_e} \\
&= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{⑩} \cdot l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot \ddot{a}_{x_r} + \frac{v}{d} \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_{x_e}^{(T)}} \cdot \ddot{a}_{x_r} \\
&= \boxed{⑪} + S^f \qquad \text{(給付現価の記号を用いること)}
\end{aligned}
$$

一方、（II）式の右辺第一項は、受給権者を含めたすべての給付現価を表わすため、

$$
{}^{U}F = S^p + \boxed{⑫}
$$

が成立することが確認できた。

問題 17. 60 歳支給開始の終身年金(年 1 回期初払い)と個人口座を考える。基数表は 1 ページのとおり、l_x は 60 歳を 1,025 人として毎年 25 人ずつ減少し 101 歳で 0 人になるものとし、利子率は年 3% とする。60 歳時点で残高(=年金原資)1,000 万円を保有する者 1,025 人が終身年金を受給するものとして、空欄を埋めよ。ただし、①、④、⑤、⑥、および⑦は、小数第 3 位四捨五入とする。(7 点)

(1) 60 歳時点の年金原資 1,000 万円を等価な終身年金にした場合、年金額は約 $\boxed{\quad ① \quad}$ 万円である。

(2) 年金の期待受取回数は、$\boxed{\quad ② \quad}$ 回である。1,000 万円の個人口座に年 3%の利子がつくものとして、上記(1)で求めた年金額を取り崩して $\boxed{\quad ② \quad}$ 回支払うと、最終的に残高は $\boxed{\quad ③ \quad}$ (「不足」、「過不足なし」、「剰余」の中から選択)となる。

(3) 60 歳時点の個人口座 1,000 万円から上記(1)の年金を取り崩して支給した場合、61 歳時点の残高は、約 $\boxed{\quad ④ \quad}$ 万円になる。61 歳時点では、この口座残高を原資に 61 歳支給開始の終身年金を支給することに変更すると、年金額は約 $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ 万円となる。

(4) 61 歳までに死亡した 25 人の個人口座を生存している 1,000 人に 61 歳時点で均等に分配すると、1 人あたりの分配額は、約 $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ 万円である。従って、分配後の口座残高は、約 $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ 万円となり、これを原資に 61 歳支給開始の終身年金を支給することにすると、年金額は約 $\boxed{\quad ① \quad}$ 万円となり、(1)で求めた当初の年金額に一致する。

問題 18. Trowbridge モデルにおいて、保険料を年 1 回期初払いとする。以下の空欄を埋めよ。(12 点)

(1) $l_x^{(T)}$ および l_x が、それぞれ $l_x^{(T)} = A \cdot \alpha^{x-x_e}$ ($x_e \le x < x_r$)、$l_x = A \cdot \alpha^{x-x_e}$ ($x_r \le x < \omega$)、$l_\omega = 0$ で表される(ただし、A は定数、$0 < \alpha < 1$)とする。このとき、この年金制度全体の賦課方式による年間保険料 C は、$C = A \cdot \alpha^{\boxed{①}} \cdot \dfrac{\boxed{\quad ② \quad}}{1-\alpha}$ となる。

(2) 定常状態にあったこの制度が、ある年度以降、新規の被保険者が前年度の β 倍($0 < \beta < 1$、$\beta \ne \alpha$)に減少した。つまり、新規の被保険者の減少がはじまった年度を第 1 年度とすると、第 n 年度の新規の被保険者は、$A \cdot \beta^n$ で表わされる。新規の被保険者数以外の前提に変化がないものとしたとき、第 $(x_r - x_e)$ 年度における賦課方式による在職中の被保険者 1 人あたりの保険料は、定常状態における保険料の $\dfrac{1}{\beta^{\boxed{①}}} \cdot \dfrac{1-\boxed{③}}{1-\left(\boxed{③}\right)^{\boxed{①}}} \cdot \dfrac{1-\alpha^{\boxed{①}}}{1-\alpha}$ 倍となる。

(3) 新規の被保険者の減少傾向が(2)と同様に継続した場合、第 $(\omega - x_e)$ 年度における賦課方式による在職中の被保険者 1 人あたりの保険料は、$\dfrac{1-\left(\boxed{③}\right)^{\boxed{④}}}{\left(\boxed{③}\right)^{\boxed{⑤}} - 1}$ となる。

(4) (3)において $\beta = \alpha$ であったとすると、在職中の被保険者 1 人あたりの保険料は、$\boxed{\quad ⑥ \quad}$ となる。

問題 19．定常状態の Trowbridge モデルにもとづく年金制度を仮定する。財政方式を加入年齢方式、保険料の拠出を年１回期初として、以下の文章の空欄を埋めよ。(12 点)

(1) 加入年齢を x_e と標準保険料 ${}^{E}P$ および制度全体の保険料 C は、以下のとおりとなる。

$$ {}^{E}P=\frac{\sum_{x=x_r}^{\omega}\boxed{①}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{②}} 、\quad C={}^{E}P\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③} $$

(2) 制度全体の責任準備金は、以下のとおりである。

$$ V=\sum_{x=x_r}^{\omega}\sum_{u=x}^{\omega}l_u\cdot v^{\boxed{④}}+\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{u=\boxed{⑤}}^{\omega}l_u\cdot v^{\boxed{④}}-{}^{E}P\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{u=x}^{x_r-1}l_u^{(T)}\cdot v^{\boxed{④}} $$

ここで、右辺第１項は年金受給者、第２項は在職中の被保険者の給付現価である。

$$ \frac{V}{C}=\frac{\sum_{x=x_r}^{\omega}\sum_{u=x}^{\omega}l_u\cdot v^{\boxed{④}}+\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{u=\boxed{⑤}}^{\omega}l_u\cdot v^{\boxed{④}}-{}^{E}P\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{u=x}^{x_r-1}l_u^{(T)}\cdot v^{\boxed{④}}}{{}^{E}P\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}} $$

$$ =\frac{\sum_{x=x_r}^{\omega}\sum_{u=x}^{\omega}l_u\cdot v^{\boxed{④}}+\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{u=\boxed{⑤}}^{\omega}l_u\cdot v^{\boxed{④}}}{{}^{E}P\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}}-\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{u=x}^{x_r-1}l_u^{(T)}\cdot v^{\boxed{④}}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}} $$

$$ =\frac{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\ddot{a}_{\boxed{⑥}}}{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\boxed{⑦}}\cdot\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\boxed{⑦}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}}-\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\ddot{a}_{\boxed{⑥}}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}} $$

$$ =\frac{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\ddot{a}_{\boxed{⑥}}}{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x}\cdot\frac{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x}{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\boxed{⑦}}\cdot\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\boxed{⑦}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}}-\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\ddot{a}_{\boxed{⑥}}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}} $$

(3) $\tilde{a}^{p}=\dfrac{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\ddot{a}_{\boxed{⑥}}}{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x}$、$\tilde{a}^{a}=\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\ddot{a}_{\boxed{⑥}}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}}$、$\tilde{v}^{p}=\dfrac{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\boxed{⑦}}{\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x}$、$\tilde{v}^{a}=\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\boxed{⑦}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{③}}$ とおくと、

$V=\left\{\tilde{a}^{p}\cdot\boxed{⑧}-\tilde{a}^{a}\right\}\cdot C$ となる。特に $i=0$ の場合、$\tilde{x}^{p}$、$\tilde{x}^{a}$ を、それぞれ年金受給者、在職中の被保険者の平均年齢とすると、$V=\boxed{⑨}\cdot C$ となる。

問題 20．Trowbridge モデルを想定する。定常状態における開放基金方式の１人あたり標準保険料が、単位積立方式の年齢別１人あたり保険料の在職中の被保険者数による加重平均で表わされることを示せ。ただし、保険料の拠出は、年１回期初とする。(12 点)

以上

平成 18 年 3 月 17 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１	問題２	問題３	問題４	問題５	問題６	問題７	問題８
（C）	（D）	（C）	（A）	（E）	（C）	（B）	（B）
問題９	問題 10	問題 11	問題 12	問題 13	問題 14	問題 15	
（C）	（A）	（B）	（E）	（F）	（C）	（E）	

問題16	①	②	③	④	⑤	⑥
	$\frac{1}{x_r - x_e}$	$v^{x_r - x}$	$\frac{B}{d}$	$\frac{{}^{U}C}{d}$	$x_r - x_e$	v^t
	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
	$t \cdot v^t$	$x_r - 1$	$(x_r - x) \cdot v^{x_r - x}$	$\frac{x_r - x}{x_r - x_e}$	S_{FS}^{a}	S_{PS}^{a}

問題17	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	67.90	21	不足	960.06	66.24	24.00	984.06

問題18	①	②	③	④	⑤	⑥
	$x_r - x_e$	$1 - \alpha^{\omega - x_r}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\omega - x_r$	$x_e - x_r$	$\frac{\omega - x_r}{x_r - x_e}$

問題19	①	②	③	④	⑤
	D_x	$D_x^{(T)}$	$l_x^{(T)}$	$u - x$	x_r
	⑥	⑦	⑧	⑨	
	$x - x_e + 1$	v^x	$\frac{\tilde{v}^a}{\tilde{v}^p}$	$\left(\tilde{x}^p - \tilde{x}^a\right)$	

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 20

定常状態における開放基金方式の１人あたり標準保険料を ${}^{OAN}P$ **、制度全体の保険料を** ${}^{OAN}C$ **、**
単位積立方式の年齢別１人あたり保険料を ${}^{U}P_x$ **、制度全体の保険料を** ${}^{U}C$ **とする。**

【解答１】

定義より、

$$ {}^{OAN}P = \frac{S_{FS}^a + S^f}{G^a + G^f} = \frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot l_x^{(T)} + \frac{v}{d} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}^{(T)}} \cdot l_{x_e}^{(T)}}{\dfrac{L}{d}} $$

右辺の分子を整理する。

$$ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot l_x^{(T)} + \frac{v}{d} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}^{(T)}} \cdot l_{x_e}^{(T)} = l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot v^{x_r - x} + \frac{v^{x_r - x_e + 1}}{d} \right) $$

さらに、右辺カッコ内を整理する。

$$ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot v^{x_r - x} + \frac{v^{x_r - x_e + 1}}{d} = \frac{1}{x_r - x_e} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{v^{x_r - x}}{d} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{v^{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot l_x^{(T)} $$

従って、

$$ S_{FS}^a + S^f = l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \left(\frac{1}{d} \frac{1}{x_r - x_e} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{v^{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot l_x^{(T)} \right) = \frac{1}{d} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x^{(T)}} \cdot l_x^{(T)} = \frac{1}{d} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_x \cdot l_x^{(T)} $$

よって、 ${}^{OAN}P = \dfrac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_x \cdot l_x^{(T)}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}}$ **が成立し、題意が示された。**

【解答２】

${}^{OAN}C = {}^{OAN}P \cdot \displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}$ **、** ${}^{U}C = \displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_x \cdot l_x^{(T)}$ **である。**

一方、定常状態において、開放基金方式と単位積立方式の積立金は等しいので、
極限方程式($C + d \cdot F = B$ **)から** ${}^{OAN}C = {}^{U}C$ **が得られる。**

従って、

$$ {}^{OAN}P \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_x \cdot l_x^{(T)} $$

$$ {}^{OAN}P = \frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_x \cdot l_x^{(T)}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}} $$

となり、これは題意を示している。

以上