基礎数理（問題）

問題１．次の（１）から（８）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい答えを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (20 点)

（１）箱に３枚のカードが入っており、１，２，３の数字が書いてある。この箱から復元で２回取り出すときの数字を X_1， X_2 とする。
$T_1 = \min(X_1, X_2)$， $T_2 = \max(X_1, X_2)$ で与えられるとき、空欄にあてはまるのは次のうちどれか。

T_1 の平均値 $E(T_1) =$ $\boxed{\text{①}}$ ， T_1 の分散　$V(T_1) =$ $\boxed{\text{②}}$ ，

T_2 の平均値 $E(T_2) =$ $\boxed{\text{③}}$ ， T_2 の分散　$V(T_2) =$ $\boxed{\text{④}}$ ，

T_1， T_2 の相関係数 $\rho(T_1, T_2) =$ $\boxed{\text{⑤}}$

（ア） $\frac{1}{2}$	（イ） $\frac{1}{3}$	（ウ） $\frac{2}{3}$	（エ） $\frac{38}{3}$	（オ） $\frac{14}{9}$
（カ） $\frac{22}{9}$	（キ） $\frac{\sqrt{38}}{9}$	（ク） $\frac{8}{17}$	（ケ） $\frac{\sqrt{5}}{17}$	（コ） $\frac{5}{18}$
（サ） $\frac{\sqrt{5}}{18}$	（シ） $\frac{8}{19}$	（ス） $\frac{\sqrt{8}}{19}$	（セ） $\frac{7}{22}$	（ソ） $\frac{7}{23}$
（タ） $\frac{7}{24}$	（チ） $\frac{\sqrt{7}}{24}$	（ツ） $\frac{16}{81}$	（テ） $\frac{38}{81}$	（ト） $\frac{\sqrt{38}}{81}$

（２）長さ 1 の線分 AB がある。まず線分 AB 上に適当に点 P をとり、さらに線分 AP 上に適当な点 Q をとる。このように 2 点 P, Q をとったとき、線分 PQ の長さが $\frac{1}{2}$ 以上になる確率は次のうちどれか。

（ア） $\frac{1}{4}$	（イ） $\frac{1}{3}$	（ウ） $\frac{1}{2}$	（エ） $\frac{2}{3}$	（オ） $\frac{3}{4}$
（カ） $\frac{1+\log 2}{2}$	（キ） $\frac{1-\log 2}{2}$	（ク） $\frac{1+\log 3}{3}$	（ケ） $\frac{\sqrt{2}}{2}$	（コ） $\frac{\sqrt{3}}{3}$

（3）次の（ア)、(イ)、(ウ）のうち正しいのはどれか。

標本抽出のとき、標本の数が大きくなるにしたがって標本平均の分散は

（ア）値が小さくなり 0 に収束する。

（イ）値が大きくなり無限大に発散する。

（ウ）必ずしも大きくまたは小さくならず、母分散に近づく。

（4）袋の中に、1 から 100 まで書かれたカードが 1 枚ずつ、合計 100 枚入っている。この袋から n 枚のカードを選び出して算出される標本平均の分散 $V(\overline{X})$ が母分散の 5%以下となるために必要な n の値の最小値は次のうちどれか。

（ア）16　（イ）17　（ウ）18　（エ）19　（オ）20

（5）死力が $\mu_x = \dfrac{4}{80-x} - \dfrac{10}{120-x}$ であるとき、${}_{10}q_{60}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）0.573　（イ）0.583　（ウ）0.593　（エ）0.603　（オ）0.613

（6）ある生命表において、略算平均余命が $e_{35} = 23.90$、$e_{36} = 22.92$、$e_{37} = 21.93$ となっている。このとき、${}_{2}q_{35}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

（ア）0.00118　（イ）0.00121　（ウ）0.00124　（エ）0.00127　（オ）0.00130

（7）x 歳加入、n 年払込、契約当初より n 年後から年金支払を開始する T 年有期の生命年金（年金年額１、年１回年度始支払）の年払営業保険料 P の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、x 歳加入、n 年払込、保険期間 n 年の養老保険（保険金額１、保険金年度末支払）の年払営業保険料 P^{*} を 0.0236 とするとともに、$\ddot{a}_{x+n:\overline{T|}}=9.01$、$P_{x:\overline{n|}}^{\;1}=0.0053$ とし、予定事業費は以下の通りとする。

	有期生命年金	養老保険
予定新契約費	新契約時に、年金開始時点における年金原資の 20‰	新契約時に、保険金額の 20‰
予定集金費	保険料払込の都度、年払営業保険料の 3%	保険料払込の都度、年払営業保険料の 3%
予定維持費	保険料払込中は、毎年度始に、年金開始時点における年金原資の 2‰	保険料払込中は、毎年度始に、保険金額の 2‰
	年金開始後は、毎年度始に、年金年額の 1%	

（ア） 0.1647　（イ） 0.1650　（ウ） 0.1653　（エ） 0.1656　（オ） 0.1659

（8）(x) と (y) の死亡はお互いに独立に発生し、それぞれの死亡率が、$q_x=0.03$、$q_y=0.05$ のとき、$p_{xy}^{[1]}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア） 0.077　（イ） 0.079　（ウ） 0.081　（エ） 0.083　（オ） 0.085

問題２．次の（１）から（６）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。 (48 点)

（１）ある会社の従業員が、ある日の翌日に健康に出社するか病欠するかは、その日の健康状態のみに依存している。健康に出社した日の翌日に健康に出社する確率は 0.9 で、逆に病欠した翌日に健康に出社する確率は 0.7 であるものとする。

（ｉ）この会社には 1,000 人の従業員がいて、本日は 950 人が健康に出社、50 人が病欠とする。翌日、健康に出社する人数の期待値は $\boxed{\quad ① \quad}$ 人である。

（ii）２日後に出社する人数の期待値は $\boxed{\quad ② \quad}$ 人である。

（iii）n 日後に健康に出社する者の人数を L_n と置くと、n が十分大きくなれば、L_n は定常状態になり、$\boxed{\quad ③ \quad}$ 人に収束する。

（２）確率変数 X が、確率密度関数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}, & (x \geq 0) \\ 0 \quad , & (x<0) \end{cases}$ で与えられるとき、この確率変数の積率母関数 $M(\theta)$ を求める。

$$M(\theta)=E\left[e^{\theta x}\right]=\int_0^{\infty} \boxed{\quad ① \quad}\, dx$$

$$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} \boxed{\quad ② \quad}\, dx$$

$$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty} \boxed{\quad ③ \quad}\left(\frac{1}{\lambda-\theta}\right)dy \qquad \because \quad (\lambda-\theta)x=y \text{ と置換}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\boxed{\quad ④ \quad}\int_0^{\infty} \boxed{\quad ⑤ \quad}\, dy$$

$$=\boxed{\quad ④ \quad}$$

（3）袋の中に白球のみがいくつか入っている。いまこの袋の中に黒球 60 個を入れよくかき混ぜて、無作為に 60 個抽出したところ、その中に黒球が 6 個あった。このとき最初袋の中にあった白球の数の最尤推定値を求める。

白球の数を n とする。抽出した 60 個の中黒球が 6 個入る確率は

$$p_n = \frac{\binom{60}{6}\binom{n}{\boxed{①}}}{\binom{\boxed{②}}{60}}$$

この p_n が尤度関数となり、これを最大にする n が最尤推定値である。ここで、

$$p_{n+1} - p_n = \binom{60}{6}\frac{60!}{54!}\frac{(n!)^2}{(n-53)!(n+61)!}\cdot 6\cdot(\ \boxed{③}\ )$$

したがって、n が $\boxed{④}$ のとき $p_{n+1} = p_n$ で最大となり最尤推定値は $\boxed{④}$ または $\boxed{⑤}$ である。

（4）2 つの正規母集団を考える。1 つの母集団から標本数 7 の標本を取り出したところ、標本分散は 15 であった。もう 1 つの母集団から標本数 6 の標本を取り出したとき、有意水準 5%の両側検定により、2 つの母集団の分散が同じでないといえるような最小の標本分散を求めたい。次の空欄を埋めよ。ただし①～③については分数で記入すること。

また、必要に応じて F 分布の値

$F_5^6(0.025) = 6.978$ $F_6^5(0.025) = 5.988$ $F_6^7(0.025) = 5.695$ $F_7^6(0.025) = 5.119$

$F_5^6(0.05) = 4.950$ $F_6^5(0.05) = 4.387$ $F_6^7(0.05) = 4.207$ $F_7^6(0.05) = 3.866$

を使用すること。

標本数 6 の標本分散を S_y^2 とする。

標本数 7 の不偏分散は $\boxed{①}$、標本数 6 の不偏分散は $\boxed{②} \times S_y^2$

S_y^2 を大きくして考えることから、不偏分散比の分子は標本数 6 のほうを用いる。

標本分散比 $= \boxed{③} \times S_y^2 > F_{\boxed{⑤}}^{\boxed{④}}\left(\boxed{⑥}\right)$ となるから、これより S_y^2 を求めると、

$S_y^2 > \boxed{⑦}$ （小数第４位を四捨五入）

（5）ある保険種目の 1 契約あたりのクレーム数は平均 0.0072 のポアソン分布に従い、クレーム額は平均 75 万円の指数分布に従う。引受契約 10,000 件全てが当保険種目であり、当保険種目の保険金支払いを事業年度期初に保有するサープラス 1,180 万円と純保険料に安全割増 5.3%を加えた保険料収入とで賄う。契約は全て期初に締結され（同時に保険料を領収する）、保険金は全て当該事業年度期中に支払われる。運用益は考えない。

契約に全て 95%の縮小てん補を付した場合の当該事業年度での破産確率を求めたい。次の空欄を埋めよ。

また、必要に応じて標準正規分布の値

$u(0.02)=2.054$　$u(0.03)=1.881$　$u(0.04)=1.751$　$u(0.05)=1.645$　$u(0.06)=1.555$

を使用し、さらにこの間の値を使用する場合には直線補間にて使用すること。

クレームの件数の平均は、$10{,}000\times 0.0072 = 72$

クレーム総額S_1（万円）の期待値は、$E(S_1)=75\times 72 = 5{,}400$

クレーム額X（万円）は平均 75 の指数分布に従うので、Xの原点周りの 2 次のモーメントは、

$E(X^2)=\int_0^\infty$ $\boxed{①}$ $dx=$ $\boxed{②}$

よってクレーム総額S_1（万円）の標準偏差は、$\sqrt{V(S_1)}=$ $\boxed{③}$

ここで、求める破産確率は、$P($ $\boxed{④}$ $>$ $\boxed{⑤}$ $)$ で表され、$Z=$ $\boxed{④}$ は標準正規分布に従うから、

$P(Z>$ $\boxed{⑤}$ $)=$ $\boxed{⑥}$

これが求める確率となる。(⑤、⑥は小数第４位を四捨五入）

（6）ＡＲ（1）モデル$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ・・・(ア)　について考える。

ここに、$E(Y_t) = \mu,\ V(Y_t) = \gamma_0,\ Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \gamma_1$　はいずれも時刻tに依存しない定数であり、誤差項ε_tはY_{t-1}と独立で　$E(\varepsilon_t) = 0,\ V(\varepsilon_t) = \sigma^2$　である。

（ア）の両辺の平均をとり、μについて解くと、

$\mu =$ $\boxed{\text{①}}$

次に$Y_t - \mu =$ $\boxed{\text{②}}$ $+ \varepsilon_t$ ・・・(イ)

（イ）の両辺に$(Y_t - \mu)$を乗じて平均をとると

$\boxed{\text{③}}$ ＝ $\boxed{\text{④}}$ ・・・(ウ)

また（イ）の両辺に$(Y_{t-1} - \mu)$を乗じて平均をとると

$\boxed{\text{⑤}}$ ＝ $\boxed{\text{⑥}}$ ・・・(エ)

（ウ)、(エ）より

$\gamma_0 =$ $\boxed{\text{⑦}}$

$\gamma_1 =$ $\boxed{\text{⑧}}$

ただし、解答にはE, V, Covを用いてはならない。

問題３　次の（１）～（６）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、自然対数の底eは記号ではなく数値であることに注意すること。(32 点)

（１）あるnについて $\bar{a}_{\overline{n}|} = n-5$ が成り立ち、利力 $\delta = 0.02$ とするとき、$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,dt$ を求める。

定義より $\bar{a}_{\overline{t}|}$ はt、δ以外の記号を用いないで $\bar{a}_{\overline{t}|} = \boxed{①}$ と表される。

これを$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,dt$ に代入して変形し、さらに $\bar{a}_{\overline{n}|} = n-5$ を代入すれば、$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,dt$ は

δ 以外の記号を用いないで、$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,dt = \boxed{②}$ と表される。

ここに、$\delta = 0.02$を代入すれば、$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,dt = \boxed{③}$（小数第１位を四捨五入）が求まる。

（２）$l_x = \omega - x \quad (0 \le x \le \omega)$ 、利力がδ とする。このとき

$\bar{A}_x$はω、x、δ以外の記号を用いないで $\bar{A}_x = \dfrac{1}{\boxed{①}} \times (1- \boxed{②})$ と表される。

次に x歳加入、経過 t時点の死亡給付が $e^{2\delta t}$ である保険金即時払終身保険の一時払保険料

B_xはω、x、δ以外の記号を用いないで $B_x = \dfrac{1}{\boxed{①}} \times (\boxed{③} -1)$ と表される。

（3）$0<t<m<n$、${}_{t}V_{x:\overline{m}|}=0.4495$ 、${}_{t}V_{x:\overline{n}|}=0.2721$ 、$A_{x:\overline{n}|}=0.5631$　のとき、${}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|}$ を求める。

${}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|}$ を将来法により表すと、${}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|}=$ $\boxed{\text{①}}$ $-$ $\boxed{\text{②}}$ $\times$ $\boxed{\text{③}}$ となる。

ここで、右辺の第１項($\boxed{\text{①}}$ ）及び第２項（ $\boxed{\text{②}}$ × $\boxed{\text{③}}$ ）を${}_{t}V_{x:\overline{m}|}$、${}_{t}V_{x:\overline{n}|}$、$A_{x:\overline{n}|}$以外の記号を用いないで表すと、　第１項＝ $\boxed{\text{④}}$ 、第２項＝ $\boxed{\text{⑤}}$ 　となるので、

${}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|}=$ $\boxed{\text{④}}$ $-$ $\boxed{\text{⑤}}$ 　と表すことができる。

ここに、上記の数値を代入すれば、${}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|}=$ $\boxed{\text{⑥}}$（小数第５位を四捨五入）が求まる。

ただし、空欄①～③には適切な１つの記号を記入すること。１つの記号とは、例えば${}_{t}V_{x:\overline{m}|}$や$A_{x:\overline{n}|}$ 等をいい、$\sum_{t=0}^{n-1}{}_{t}V_{x:\overline{n}|}$ や（${}_{t}V_{x:\overline{m}|}+{}_{t}V_{x:\overline{n}|}$）等は不可とする。

（4）$P_{x:\overline{n}|}=0.02527$、$P^{1}_{x:\overline{t}|}=0.00134$、$P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}=0.05591$、${}_{s}V^{1}_{x:\overline{t}|}=0.00231$、${}_{s}V_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}=0.29766$

（$0<s<t<n$）のとき、${}_{s}V_{x:\overline{n}|}$　を求める。

まず、${}_{t}V_{x:\overline{n}|}$ は $P_{x:\overline{n}|}$、$P^{1}_{x:\overline{t}|}$、$P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}$　を用いて表すことができるから、これ変形して $P_{x:\overline{n}|}$ は ${}_{t}V_{x:\overline{n}|}$、$P^{1}_{x:\overline{t}|}$、$P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}$ 以外の記号を用いないで $P_{x:\overline{n}|}$ ＝ $\boxed{\text{①}}$ ・・・(ア)　と表すことができる。

次に、責任準備金${}_{s}V_{x:\overline{n}|}$ は(ア)を用いることにより、${}_{t}V_{x:\overline{n}|}$、${}_{s}V^{1}_{x:\overline{t}|}$、${}_{s}V_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}$ 以外の記号を用いないで ${}_{s}V_{x:\overline{n}|}$ ＝ $\boxed{\text{②}}$ ・・・(イ)　と表すことができる。

ここで、(ア)に上記の数値を代入して ${}_{t}V_{x:\overline{n}|}$ を求め、さらに(イ)にこの値と上記の数値を代入すると、

${}_{s}V_{x:\overline{n}|}$ ＝ $\boxed{\text{③}}$（小数第６位を四捨五入）が求まる。

（5）生命表がゴムパーツの法則、すなわち $\mu_x = Bc^x$ （B、c は定数）に従い、$c^x + c^y = c^w$ のとき、

$\bar{A}^{1}_{xy}$ は $x, w, c, \bar{A}_w$ 以外の記号を用いないで $\bar{A}^{1}_{xy} = \boxed{①}$ と表せる。

次に上記を用いて、$\mu_x = 10^{-4} \cdot 2^{\frac{x}{8}}$ 、$\bar{A}_{54} = \alpha$ 、$\bar{A}_{62} = \beta$ のとき、$\bar{A}^{2}_{54,54}$ は α, β 以外の記号を用いないで $\bar{A}^{2}_{54,54} = \boxed{②}$ と表せる。

（6）$D^{aa}_x = 6602.506$、$D^{ii}_x = 43.063$、$M^{ii}_x = 680.008$、$M^{ii}_{x+n} = 653.447$、$A^{i}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = 0.21561$ のとき、就業者(x)が就業不能となり、n 年以内に死亡したとき保険金１をその年度末に支払う契約の一時払保険料 $A^{ai}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$ を求める。

$$A^{ai}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \times \boxed{①} \quad ・・・（ア）$$

ここで、 $\boxed{①} = \dfrac{\boxed{②} - \boxed{③} \times \boxed{④}}{\boxed{⑤}}$ と表せるから、

（ア）にこれを代入し、さらに右辺の分母、分子に v^x を乗じて整理すれば、

$A^{ai}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$ は D^{aa}_x 、D^{ii}_x 、M^{ii}_x 、M^{ii}_{x+n} 、$A^{i}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$ で表せる。

よって、上記の数値を代入すれば、$A^{ai}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \boxed{⑥}$ （小数第６位を四捨五入）が求まる。

ただし、空欄①～⑤には適切な１つの記号を記入すること。１つの記号とは、例えば v^{t+1} や D^{aa}_x 等をいい、$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}$ や $(D^{aa}_x + D^{ii}_x)$ 等は不可とする。

平成 19 年 10 月 4 日

科目	基礎数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１

(1)					(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
①	②	③	④	⑤							
（オ）	（テ）	（カ）	（テ）	（シ）	（キ）	（ア）	（イ）	（オ）	（エ）	（イ）	（ア）

問題２

(1)	① 890	② 878	③ 875
(2)	① $e^{\theta x}\dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}$	② $e^{-(\lambda-\theta)x}x^{n-1}$	③ $e^{-y}\left(\dfrac{y}{\lambda-\theta}\right)^{n-1}$
	④ $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-\theta}\right)^{n}$	⑤ $e^{-y}y^{n-1}$	
(3)	① 54	② $n+60$	③ $539-n$
	④ 539	⑤ 540	
(4)	① $\dfrac{35}{2}$	② $\dfrac{6}{5}$	③ $\dfrac{12}{175}$
	④ 5　⑤ 6	⑥ 0.025	⑦ 87.325
(5)	① $x^2\dfrac{1}{75}e^{-\frac{1}{75}x}$	② 11250	③ 900
	④ $\dfrac{S_1-5400}{900}$	⑤ 1.698	⑥ 0.045

(6)	① $\dfrac{\phi_0}{1-\phi_1}$	② $\phi_1(Y_{t-1}-\mu)$	③ γ_0	④ $\phi_1\gamma_1+\sigma^2$
	⑤ γ_1	⑥ $\phi_1\gamma_0$	⑦ $\dfrac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$	⑧ $\dfrac{\phi_1\sigma^2}{1-\phi_1^2}$

平成 19 年 10 月 4 日

科目	基礎数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題３

（1）	① $\dfrac{1-e^{-\delta t}}{\delta}$	② $\dfrac{5}{\delta}$	③ 250
（2）	① $(\omega - x)\delta$	② $e^{-\delta(\omega - x)}$	③ $e^{\delta(\omega - x)}$

（3）	① $A_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$	② ${}_{m}P_{x:\overline{n}\rceil}$
	③ $\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}\rceil}$　②と③は順不同	④ $A_{x:\overline{n}\rceil}+{}_{t}V_{x:\overline{n}\rceil}(1-A_{x:\overline{n}\rceil})$
	⑤ $A_{x:\overline{n}\rceil}(1-{}_{t}V_{x:\overline{m}\rceil})$	⑥ 0.3720
（4）	① ${}_{t}V_{x:\overline{n}\rceil}\times P_{x:\overline{t}\rceil}^{\ \ 1}+P^{1}_{x:\overline{t}\rceil}$	② ${}_{t}V_{x:\overline{n}\rceil}\times{}_{s}V_{x:\overline{t}\rceil}^{\ \ 1}+{}_{s}V^{1}_{x:\overline{t}\rceil}$
	③ 0.12971	
（5）	① $\dfrac{c^{x}}{c^{w}}\bar{A}_{w}$	② $\alpha-\dfrac{\beta}{2}$

（6）	① ${}_{t\mid}q_{x}^{ai}$	② d_{x+t}^{ii}	③ l_{x}^{ii}
	④ ${}_{t\mid}q_{x}^{i}$　③と④は順不同	⑤ l_{x}^{aa}	⑥ 0.00262