年金数理(問題)

本問題においては、以下のとおりとする。
1. 「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。
2. 「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。
3. 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。

問題 1 から 15 までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題 16 から 20 までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に答案を記せ。

問題１．経過年数 t において 1 年あたり $10\cdot k + t\cdot k$ が支払われる連続払 10 年確定年金がある。利力を $\delta_t = 1/(10+t)$ とした場合の年金現価は 200 であった。k の値として最も近いものは次のいずれか。（３点）

(A)1.0、 (B)1.5、 (C)2.0、 (D)2.5、 (E)3.0

問題２．次の式のうち、正しいものはいずれか。なお、μ_x は x について単調増加とする。(３点)

(A) $\dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq \mu_x \leqq q_{x-1}$、 (B) $\mu_x \leqq q_{x-1} \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$、 (C) $\dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq q_{x-1} \leqq \mu_x$

(D) $q_{x-1} \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq \mu_x$、 (E) $q_{x-1} \leqq \mu_x \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$

問題３．D_x ＝58,472.556、$\overline{C}_x$ ＝460.2225、p_x ＝0.99209 のとき、予定利率として最も近いものは次のいずれか。（３点）

(A)1.0%、 (B)1.1%、 (C)1.2%、 (D)1.3%、 (E)1.4%

問題４．次の式のうち、誤っているものはいずれか。(３点)

(A) $\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}} - \dfrac{1}{s_{\overline{n|}}} = i$、 (B) $\ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{\overset{1}{xy}}$、 (C) $I\ddot{a}_{\overline{n|}} = \left(1+\dfrac{1}{i}\right)\cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} - \dfrac{n\cdot v^{n-1}}{i}$

(D) $Ia_{\overline{n|}} = \dfrac{1}{i}\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - (n+1)\cdot v^n\right)$、 (E) $(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \dfrac{1}{D_x}\cdot\left(S_x - S_{x+n} - n\cdot N_{x+n}\right)$

問題５．A 社は、退職金の一部を原資として定年（60 歳）退職者に年金を支給する年金制度について、以下のような制度変更を検討している。

（現行制度）

年金額は、定年時の退職金のα倍を予定利率 5.5%の 10 年確定年金現価率で除した額とし、60 歳から 10 年保証終身年金として支給する。

（変更案）

年金額は、定年時の退職金のβ倍を予定利率 2.5%の 15 年確定年金現価率で除した額とし、60 歳から 15 年確定年金として支給する。

制度の変更前後で、支給開始（60 歳）時点の年金の給付現価（予定利率を 2.5%とする）が変わらないように設計したとき、β / αに最も値の近いものの記号を選べ。なお、必要に応じて以下の諸数値を使用せよ。(３点)

予定利率	2.5%	5.5%
$\ddot{a}_{\overline{10}\rceil}$	8.971	7.952
$\ddot{a}_{\overline{15}\rceil}$	12.691	10.590
D_{60}	30,118.959	8,223.434
N_{60}	520,409.945	105,839.166
D_{70}	20,740.946	4,243.809
N_{70}	261,862.979	43,090.989
D_{75}	16,249.331	2,878.193
N_{75}	167,187.231	24,739.988

(A)1.00、 (B)1.82、 (C)2.22、 (D)2.52、 (E)2.62

問題６．A と B の２人を被保険者とした即時支給開始の年金を考える。当初は A のみが年金を受け取り、A の死亡を条件として、B が引き続き同額の年金を B が死亡するまで受け取るとする。支給開始時点において、A が受け取る年金現価に対する B が受け取る年金現価の比率として、最も近いものは次のいずれか。なお、年金は連続払とし、予定利率は 2.5%、A と B の死力はどちらも年齢にかかわらず一律で、それぞれ 0.02, 0.01 とする。また、計算に当たっては log(1.025)＝0.024693 を用いよ。(３点)

(A) 14.2%、 (B)22.4%、 (C)29.4%、 (D)30.9%、 (E)47.1%

問題７．年金が年 m 回期末払、かつ死亡した場合は $1/m$ 年をさらに n 期に区分し、死亡した日の属する期まで給付が支払われる場合の、x 歳における即時支給開始終身年金現価率の近似式を表すものは、次のいずれか。(３点)

(A) $\dfrac{N_x - \dfrac{m+1}{2m}D_x + \dfrac{1}{2m}\overline{M}_x}{D_x}$、(B) $\dfrac{N_x - \dfrac{m-1}{2m}D_x + \dfrac{1}{4n}\overline{M}_x}{D_x}$、(C) $\dfrac{N_x - \dfrac{m+1}{2m}D_x + \dfrac{1}{4n}\overline{M}_x}{D_x}$

(D) $\dfrac{N_x - \dfrac{m-1}{2m}D_x + \dfrac{n+1}{2mn}\overline{M}_x}{D_x}$、(E) $\dfrac{N_x - \dfrac{m+1}{2m}D_x + \dfrac{n+1}{2mn}\overline{M}_x}{D_x}$

問題８．Trowbridge モデルにおいて、単位積立方式による 55 歳時点の一人当たりの責任準備金に最も近いものは次のいずれか。なお、加入年齢 20 歳、定年年齢 60 歳とし、必要に応じて以下の諸数値を使用せよ。ここで、$D_x = l_x \cdot v^{x-15}$ 、$D_x^{(T)} = l_x^{(T)} \cdot v^{x-15}$ である。(３点)

x	l_x	D_x	N_x	$l_x^{(T)}$	$D_x^{(T)}$
55	94,475.05	35,185.402	686,041.538	118,248.564	44,039.387
56	93,957.33	34,139.108	650,856.137	112,336.136	40,816.992
57	93,402.98	33,109.939	616,717.029	106,719.329	37,830.383
58	92,808.93	32,096.936	583,607.090	101,383.363	35,062.306
59	92,175.05	31,100.209	551,510.154	96,314.195	32,496.772
60	91,498.48	30,118.959	520,409.945	91,498.485	30,118.959

(A)10.3、　(B)11.7、　(C)12.9、　(D)14.6、　(E)15.1

問題９．Trowbridge モデルの年金制度において、以下の財政方式の定常状態における保険料の大小関係を正しく示しているものは次のいずれか。(３点)

(A) 退職時年金現価積立方式＜賦課方式＜加入時積立方式＜平準積立方式＜単位積立方式
(B) 加入時積立方式＜平準積立方式＜単位積立方式＜退職時年金現価積立方式＜賦課方式
(C) 加入時積立方式＜単位積立方式＜退職時年金現価積立方式＜平準積立方式＜賦課方式
(D) 加入時積立方式＜単位積立方式＜平準積立方式＜退職時年金現価積立方式＜賦課方式
(E) 加入時積立方式＜平準積立方式＜退職時年金現価積立方式＜単位積立方式＜賦課方式

問題 10. Trowbridge モデルの年金制度において、加入時積立方式を採用した場合と単位積立方式を採用した場合の定常状態における積立金の差額を表す式は次のいずれか。(３点)

(A) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} {}^{L}P\cdot l_x\cdot\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$、(B) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x\cdot\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$、 (C) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x\cdot\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$

(D) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$、(E) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x\cdot\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$

問題 11. 次の条件による加入者 A の給付現価に最も近いものは次のいずれか。(３点)

【制度内容】

定年(60 歳)到達者に、本人の選択により即時支給 10 年確定年金または一時金を支払う。

年金額：退職時給与×加入年数÷7.952、一時金額：退職時給与×加入年数

【計算前提・基礎率】

計算基準日：2008 年 3 月 31 日、予定利率：2.5%

中途脱退率：一律 5%、昇給率：一律 3%（脱退および昇給は毎年 4 月 1 日にあるものとする）

一時金選択率：50%（定年到達者のうち 50%が一時金を、50%が年金を選択するものとする）

【加入者 A の個人データ】

生年月日：1968 年 4 月 1 日（2028 年 3 月 31 日に定年到達予定）

加入年月日：1988 年 4 月 1 日、計算基準日時点の給与：450,000 円

【計算基礎数値】

$\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(i=5.5\%)}=7.952$、$\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(i=2.5\%)}=8.971$

$1.025^{40}=2.685$、$1.03^{40}=3.262$、$1.055^{40}=8.513$、$0.95^{40}=0.129$

(A) 4,200（千円）、 (B) 7,130（千円）、 (C) 7,580（千円）、
(D) 8,030（千円）、 (E) 32,510（千円）

問題 12. ある年金制度の n 年度末の積立金は 1,000、未積立債務の額は 500 であった。$n+1$ 年度については下表のことがわかっている。$n+1$ 年度末に加入者および受給権者に対して一律 10%の給付改善を行ったときの、$n+1$ 年度末の未積立債務の額として最も近いものは次のいずれか。財政方式は加入年齢方式とし、保険料および給付は期初払とする。なお、$n+1$ 年度中に利差損益以外の損益は発生しておらず、制度変更による基礎率の見直しも行わないものとする。(３点)

標準保険料	：50	予定利率	：2.0%
特別保険料	：100	運用利回り	：3.5%
給付支払い	：80		

(A) 500、 (B) 520、 (C) 540、 (D) 560、 (E) 580

問題 13. 定常状態に達している Trowbridge モデルにおいて、ある年度以降の積立金の運用利回りは予定利率iを下回る j となった。財政方式は加入年齢方式を採用し、翌年度以降、期初の未積立債務は、期初現在の加入者の加入中に償却するような一人当たり一定額の特別保険料を毎年計算して償却を行うものとする。運用利差損以外に責任準備金または年金資産から差損益が発生しないものとすると、加入者一人当たりの標準保険料と特別保険料の合計値の収束値として正しいものは次のいずれか。ここでS^p、S^a、S^f、G^a、G^fを予定利率iとした場合の給付現価および人数現価、${}^*S^p$、${}^*S^a$、${}^*S^f$、${}^*G^a$、${}^*G^f$を予定利率 j とした場合の給付現価および人数現価とする。（３点）

(A) $\dfrac{S^f+\left({}^*S^p+{}^*S^a\right)-\left(S^p+S^a\right)}{G^f+\left({}^*G^a-G^a\right)}$、 (B) $\dfrac{{}^*S^f}{{}^*G^f}$、 (C) $\dfrac{S^f}{G^f}+\dfrac{\left({}^*S^p+{}^*S^a\right)-\left(S^p+S^a\right)}{G^a}$、

(D) $\dfrac{{}^*S^f+S^f}{{}^*G^f+G^f}$、 (E) $\dfrac{{}^*S^f+\left({}^*S^p+{}^*S^a\right)-\left(S^p+S^a\right)}{{}^*G^f+\left({}^*G^a-G^a\right)}$

問題 14. 定常状態に達している年金制度において、x 歳の一人当たりの給与 B_x（円）が $B_x=a\cdot x+b$ と表されるとき、以下の前提条件を満たすaおよびbの組み合わせとして正しいものは次のいずれか。（３点)

【前提条件】

加入年齢	20 歳
平均年齢	40 歳
平均給与	30 万円
脱退時平均加入年数	30 年
脱退時平均給与	35 万円

(A) a =10,000　b =120,000、 (B) a =5,000　b =110,000、 (C) a =5,000　b =100,000

(D) a =10,000　b =90,000、 (E) a =10,000　b =80,000

問題 15. 予定利率iの下で定常状態に達している年金制度で、ある年度以降の運用利回りは、50%の確率で$i+j$、50%の確率で$i-j$となることが見込まれている$(i>j>0)$。各年度の運用利回りは互いに独立であるものとして、保険料の見直しを行わない場合に 2 年後に積立不足となる確率は次のいずれか。なお、保険料および給付は年 1 回期初に発生するものとする。（３点)

(A)0%、 (B)25%、 (C)50%、 (D)75%、 (E)100%

問題 16. ２つの会社 A および B の合併に伴い、年金制度も統合することになった。合併前の両社の諸数値が以下のとおりであるとき、空欄に当てはまる数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。
ただし、年金現価率は下記の数値を使用し、①、②、③、④、⑥は百分率表示で小数第３位を四捨五入して小数以下第２位まで求め、⑤は小数第１位を四捨五入して整数で答えよ。(14 点)

	A 社	B 社
年金受給権者の給付現価	240 百万円	100 百万円
在職中の被保険者の給付現価	1,800 百万円	720 百万円
うち、将来期間対応分	550 百万円	220 百万円
うち、過去期間対応分	1,250 百万円	500 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	525 百万円	210 百万円
在職中の被保険者の給与現価	7,688 百万円	4,805 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	7,000 百万円	4,375 百万円
積立金	1,200 百万円	500 百万円
在職中の被保険者の給与総額	288 百万円	180 百万円
未積立債務の残余償却期間	10 年	7 年

なお、両社の予定利率、予定脱退率、予定昇給率、新規加入者の年齢および 1 人当たりの給与は等しく、それぞれ定常人口にあるものとする。
また、両社の保険料は年 1 回期初払、財政方式は加入年齢方式とする。

(1) 両社の合併前の保険料率を求めると、
A 社の標準保険料率は、 [①] %、特別保険料率は、 [②] %、
B 社の標準保険料率は、 [③] %、特別保険料率は、 [④] %となる。

(2) 合併にあたり、給付水準は A 社に合わせる（年金受給権者を除く）ものとする。
このとき、合併後の責任準備金の総額は、 [⑤] 百万円、合併後の特別保険料率は、未積立債務の償却期間を A 社に合わせた場合、 [⑥] %となる。
また、合併後の特別保険料率が合併前の A 社の特別保険料率を下回らないように設定した場合、最も長い償却期間は、 [⑦] 年となる。

＜年金現価率表＞

n	$\ddot{a}_{\overline{n}|}$	n	$\ddot{a}_{\overline{n}|}$	n	$\ddot{a}_{\overline{n}|}$
5	4.808	10	9.162	15	13.106
6	5.713	11	9.983	16	13.849
7	6.601	12	10.787	17	14.578
8	7.472	13	11.575	18	15.292
9	8.325	14	12.348	19	15.992

問題 17. 年金制度の脱退差損益に関して、以下の空欄にあてはまる式、記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。(６点)

財政決算において発生する損益のうち脱退差損益は、加入者が制度から脱退した時点の責任準備金と、給付支払額または年金受給資格者が獲得した年金現価との差額によって生じる。

ここで、脱退事由にかかわらず脱退年度の期初時点の満年齢 x のみに対応した一時金給付 B_x を支給する一時金制度を考える。財政方式は加入年齢方式を採用し、一人当たり標準保険料を P とし、給付および保険料は期初払いとする。

ある年度の期初における満年齢 x 歳の加入者数は l_x 人であり、このうち W_x 人が期初の保険料支払い後直ちに制度から脱退した。期初時点の責任準備金を V_x としたとき、脱退者についての差損益の期末時点の評価額は以下の（Ⅰ）式で与えられる。

$$W_x \cdot \{(\boxed{\quad ① \quad}) - B_x\} \cdot (\boxed{②}) \qquad (\mathrm{I})$$

一方、期末の残存者についての差損益は以下の（Ⅱ）式で与えられる。

$$(l_x - W_x) \cdot \{(\boxed{\quad ① \quad}) \cdot (\boxed{②}) - V_{x+1}\} \qquad (\mathrm{II})$$

したがって、一年間に発生した差損益の合計は（Ⅰ）式と（Ⅱ）式の和として（Ⅲ）式となる。

$$l_x \cdot (\boxed{\quad ① \quad}) \cdot (\boxed{②}) - W_x \cdot B_x \cdot (\boxed{②}) - (l_x - W_x) \cdot V_{x+1} \qquad (\mathrm{III})$$

ここで、x 歳の脱退率を q_x とすると、ファクラーの公式より（Ⅳ）式が成立する。

$$l_x \cdot (\boxed{\quad ① \quad}) \cdot (\boxed{②}) = \boxed{\quad ③ \quad} \cdot B_x \cdot (\boxed{②}) + \boxed{\quad ④ \quad} \cdot V_{x+1} \qquad (\mathrm{IV})$$

（Ⅳ）式を（Ⅲ）式に代入すると、脱退差損益は以下の式で表わされる。

$$(\boxed{\quad ⑤ \quad}) \cdot \{V_{x+1} - \boxed{\quad ⑥ \quad}\}$$

問題 18. 以下の空欄に当てはまる式を解答用紙の所定欄に記入せよ。(14 点)

脱退・昇給・保険料の払込・給付の支払が連続的に起こる年金制度を考える。給付の基礎となる給与は、単位時間当たり保険料払込の基礎となる給与を連続的に積み立てるとした場合の元利合計(以下、これを「仮想個人勘定残高」と呼ぶ)とし、元利合計を計算するための利息は、利力 γ_t (t は、加入からの期間)によるものとする。記号を以下のとおり定める。

δ ：予定利率による利力、 μ_y ：年齢 y における脱退力、 β_y ：年齢 y における昇給指数

$S_\tau^{(x)}$ ： x 歳加入、τ 年で脱退した者の、脱退時の仮想個人勘定残高 1 に対する給付額

P_τ ：加入 τ 年における保険料率

加入時の給与を 1 とした場合、 x 歳加入、加入期間 τ 年の脱退時仮想個人勘定残高 $A_\tau^{(x)}$ は、

$$A_\tau^{(x)} = \int_0^\tau \frac{\beta_{x+u}}{\beta_x} \exp\left(\int_u^\tau \gamma_\eta d\eta\right) du$$

となる。さらに $A_\tau^{(x)}$ は、加入からの経過期間 t （$0 < t < \tau$ ）を用いて、

$$A_\tau^{(x)}=\left\{\int_0^t\frac{\beta_{x+u}}{\beta_x}\exp(\int_u^t\gamma_\eta d\eta)du\right\}\cdot\boxed{\quad①\quad}+\int_t^\tau\frac{\beta_{x+u}}{\beta_x}\exp(\int_u^\tau\gamma_\eta d\eta)du\cdots\text{（A）}$$

と表わされる。この式中第 1 項の中括弧内は時点tにおける仮想個人勘定残高、第 2 項はt以降の積み立てによる仮想個人残高の増加分である。

ここで、x歳加入、加入期間tにおける、加入時の給与を 1 とした場合の責任準備金${}_tV_x$は、

$${}_tV_x=\int_t^{\omega-x}\exp\left(-\int_t^\tau\boxed{\quad②\quad}d\zeta\right)\cdot\left(\boxed{\;③\;}\cdot A_\tau^{(x)}\cdot s_\tau^{(x)}-P_\tau\cdot\frac{\beta_{x+\tau}}{\beta_x}\right)d\tau$$

である。この責任準備金に、（A）式を代入すると、

$${}_tV_x=\left\{\int_0^t\frac{\beta_{x+u}}{\beta_x}\exp(\int_u^t\gamma_\eta d\eta)du\right\}\cdot\left[\int_t^{\omega-x}\exp\left(-\int_t^\tau\boxed{\quad②\quad}d\zeta\right)\cdot\boxed{\;③\;}\cdot\boxed{\quad①\quad}\cdot s_\tau^{(x)}d\tau\right]$$

$$+\frac{\beta_{x+t}}{\beta_x}\cdot\left[\int_t^{\omega-x}\exp\left(-\int_t^\tau\boxed{\quad②\quad}d\zeta\right)\cdot\left\{\left(\int_t^\tau\frac{\beta_{x+u}}{\beta_{x+t}}\exp(\int_u^\tau\gamma_\eta d\eta)du\right)\cdot\boxed{\;③\;}\cdot s_\tau^{(x)}-P_\tau\cdot\frac{\beta_{x+\tau}}{\beta_{x+t}}\right\}d\tau\right]$$

となる。第 1 項の大括弧内を仮想個人勘定残高 1 あたりの給付現価、第 2 項の大括弧内を給与 1 あたりの責任準備金とし、それぞれ${}_tV_x^{(p)}$、${}_tV_x^{(f)}$で表すこととする。つまり、

$${}_tV_x=\left\{\int_0^t\frac{\beta_{x+u}}{\beta_x}\exp(\int_u^t\gamma_\eta d\eta)du\right\}\cdot{}_tV_x^{(p)}+\frac{\beta_{x+t}}{\beta_x}\cdot{}_tV_x^{(f)}$$

である。このとき、被積分関数がそれぞれtを含む式であることに注意して、${}_tV_x^{(p)}$をtで微分すると、次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}{}_tV_x^{(p)}=(\boxed{\quad④\quad}){}_tV_x^{(p)}-\boxed{\quad⑤\quad}$$

さらに、${}_tV_x^{(f)}$において、uに関する積分とτに関する積分の順序を入れ替えることにより、

$${}_tV_x^{(f)}=\int_t^{\omega-x}\frac{\beta_{x+\tau}}{\beta_{x+t}}\cdot\exp\left(-\int_t^\tau\boxed{\quad②\quad}d\zeta\right)\cdot\left({}_\tau V_x^{(p)}-P_\tau\right)d\tau$$

が成立するため、${}_tV_x^{(f)}$に関する微分方程式

$$\frac{d}{dt}{}_tV_x^{(f)}=(\boxed{\quad⑥\quad}){}_tV_x^{(f)}+\boxed{\quad⑦\quad}$$

が成立する。

ここに$\lambda_{x+t}=\dfrac{1}{\beta_{x+t}}\dfrac{d\beta_{x+t}}{dt}$とする。

問題 19. 予定利率iの下で未積立債務が存在しない年金制度について、ある年度以降t年間の運用利回りがj（$i>0,\ \ j<i,\ 1+j>0$）になることが見込まれている。利差損の発生に備えるため、年金制度とは別に保険料の積み立てを行うこととした。保険料は年１回期初払いとし、運用利回りがjとなる年度から積み立てを開始することとする。(９点)

(1)　t年後の未積立債務の見込み額をΔ_0とするとき、予定利率iの下でt年後にΔ_0となるような平準保険料をP_1とする。この平準保険料の運用利回りをjとしたときのt年後の積立金残高は、Δ_0に対しΔ_1だけ不足している。Δ_1をΔ_0および年金現価率等を用いて表せ。ここに、$\ddot{a}_{\overline{t|}}^{(i)}$および$\ddot{a}_{\overline{t|}}^{(j)}$を予定利率$i$および$j$による$t$年確定年金現価率、$\ddot{s}_{\overline{t|}}^{(i)}$および$\ddot{s}_{\overline{t|}}^{(j)}$を予定利率$i$および$j$による$t$年確定年金終価率とする。

(2)　(1)と同様に、予定利率iの下でt年後にΔ_1となるような平準保険料をP_2とし、P_1とP_2の合計の運用利回りjによるt年後の積立金残高と、Δ_0との差額をΔ_2とする。
これを順次繰り返す。すなわち、$n \geqq 1$として、予定利率iの下でt年後にΔ_{n-1}となるような平準保険料をP_nとし、$P_1,\ldots,P_n$の合計の運用利回りjによるt年後の積立金残高と、Δ_0との差額をΔ_nとする。このとき、すべての$n \geqq 1$について、

$$\Delta_n > 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty}\Delta_n = 0$$

であることを示し、また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{\Delta_0}{\ddot{s}_{\overline{t|}}^{(j)}}$$

であることを示せ。

問題 20. 定年退職者に退職時の給与と同額の終身年金を支給する制度がある。財政方式は加入年齢方式とし、給与比例の保険料および給付の支払いは年 1 回期初払いとする。この制度に関して、以下の問いに答えよ。(12 点)

(1) 標準保険料率 P_{x_e} を、予定脱退率に基づく脱退残存表上の加入者数 l_x 、給与指数 b_x 、 v および $\ddot{a}_{x_r}$ を用いて表せ。

(2) (1)において、財政再計算を行い、計算基礎率のうち予定脱退率のみを洗い替えた結果、予定脱退率に基づく脱退残存表上の加入者数は、財政再計算前の $l_x = l_{x_e} - k \cdot (x - x_e)$ から、$l'_x = l_{x_e} - k' \cdot (x - x_e)$ (ただし $k > k' > 0$)となった。財政再計算前後の保険料の大小関係を論ぜよ。

(3) (1)において、財政再計算を行い、計算基礎率のうち給与指数のみを洗い替えた結果、給与指数は、財政再計算前の $b_x = b_{x_e} + \alpha \cdot (x - x_e)$ から $b'_x = b_{x_e} + \beta \cdot \alpha \cdot (x - x_e)$ (ただし $\alpha > 1$、$\beta > 1$ とし、$b'_x > b_{x_r}$ となる年齢においては $b'_x = b_{x_r}$ とする)となった。財政再計算前後の保険料の大小関係を論ぜよ。

以上

平成 20 年 10 月 2 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１	問題２	問題３	問題４	問題５	問題６	問題７	問題８
C	E	A	D	C	E	E	A
問題９	問題 10	問題 11	問題 12	問題 13	問題 14	問題 15	
B	E	C	C	E	C	C	

問題16	①	②	③	④
	7.50	9.98	4.80	7.52
	⑤	⑥	⑦	
	2,328	14.65	15	

問題17	①	②	③
	$V_x + P$	$1+i$	$l_x \cdot q_x$
	④	⑤	⑥
	$(1-q_x)\cdot l_x$	$W_x - l_x \cdot q_x$	$B_x \cdot (1+i)$

問題18	①	②	③
	$\exp\left(\int_t^\tau \gamma_\eta d\eta\right)$	$(\mu_{x+\zeta} + \delta)$	$\mu_{x+\tau}$
	④	⑤	⑥
	$\mu_{x+t} + \delta - \gamma_t$	$\mu_{x+t} \cdot s_t^{(x)}$	$\mu_{x+t} + \delta - \lambda_{x+t}$
	⑦		
	$P_t - {}_tV_x^{(p)}$		

平成 20 年 10 月 2 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 19

(1) $P_1 = \dfrac{\varDelta_0}{\ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}}$ より、$\varDelta_1 = \varDelta_0 - P_1 \cdot \ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}} = \varDelta_0 \cdot \left(1 - \dfrac{\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}}\right)$

(2) 題意より、$P_n = \dfrac{\varDelta_{n-1}}{\ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}}$ および $\varDelta_n = \varDelta_0 - (P_1 + P_2 + \cdots + P_n) \cdot \ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}$ である。

$$\varDelta_n = \varDelta_0 - (P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1}) \cdot \ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}} - P_n \cdot \ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}$$

$$= \varDelta_{n-1} - P_n \cdot \ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}$$

$$= \varDelta_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}}\right)$$

$$= \varDelta_0 \cdot \left(1 - \frac{\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}}\right)^n$$

ここで、 $j < i$ より、$\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}} < \ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}$ であるため、$0 < \left(1 - \dfrac{\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}^{(i)}_{\overline{t|}}}\right) < 1$。

したがって、$\varDelta_n$ は 0 より大きく、かつ 0 に収束する。

また、$\varDelta_n$ の定義より、

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{\varDelta_0 - \varDelta_n}{\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}}$$

が成り立つ。$\varDelta_n$ は 0 に収束するため、上式は $\dfrac{\varDelta_0}{\ddot{s}^{(j)}_{\overline{t|}}}$ に収束する。

平成 20 年 10 月 2 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 20

（1） $P_{x_e}=\dfrac{l_{x_r}\cdot b_{x_r}\cdot v^{x_r}\cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x\cdot b_x\cdot v^x}$

（2）変更前後の保険料をそれぞれ P および P' とする。

$$P'-P=\frac{\{l_{x_e}-k'\cdot(x_r-x_e)\}\cdot b_{x_r}\cdot v^{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{l_{x_e}-k'\cdot(x-x_e)\}\cdot b_x\cdot v^x}-\frac{\{l_{x_e}-k\cdot(x_r-x_e)\}\cdot b_{x_r}\cdot v^{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{l_{x_e}-k\cdot(x-x_e)\}\cdot b_x\cdot v^x}$$

$$=\frac{\left[\{l_{x_e}-k'\cdot(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{l_{x_e}-k\cdot(x-x_e)\}-\{l_{x_e}-k\cdot(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{l_{x_e}-k'\cdot(x-x_e)\}\right]\cdot b_{x_r}\cdot v^{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\left[\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{l_{x_e}-k'\cdot(x-x_e)\}\cdot b_x\cdot v^x\right]\cdot\left[\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{l_{x_e}-k\cdot(x-x_e)\}\cdot b_x\cdot v^x\right]}$$

上式の分子の大括弧内について、

$$[\ ]=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left[\{\ l_{x_e}-k'\cdot(x_r-x_e)\ \}\cdot\{\ l_{x_e}-k\cdot(x-x_e)\ \}-\{\ l_{x_e}-k\cdot(x_r-x_e)\ \}\cdot\{\ l_{x_e}-k'\cdot(x-x_e)\ \}\right]$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\{-k\cdot l_{x_e}\cdot(x-x_e)-k'\cdot l_{x_e}\cdot(x_r-x_e)+k'\cdot l_{x_e}\cdot(x-x_e)+k\cdot l_{x_e}\cdot(x_r-x_e)\}$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(k-k')\cdot l_{x_e}\cdot(x_r-x)$$

となり、$k'<k$ より上式はプラスとなり、したがって $P<P'$ となる。

（3）題意より $b'_{x_r}=b_{x_r}$ かつ $b'_x>b_x$（ただし、$x\leqq x_r-1$）。

したがって、（1）の標準保険料の算式のうち、変更後の分母のみが大きくなり、分子は変化がないため $P'<P$ となる。