年金数理(問題)

本問題においては、以下のとおりとする。
1. 「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。
2. 「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。
3. 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。

問題 1 から 15 までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題 11 については、解答が複数ある場合は正しいものをすべて記入せよ。問題 16 から 20 までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題１． $l_x = l_0 \times (1 - x/120)^{1/3}$ となるとき（$0 \leqq x \leqq 120$）、$\mathring{e}_x$ は次のいずれか。（３点）

(A) $\dfrac{3}{4}\cdot(120-x)$、(B) $\dfrac{2}{3}\cdot(120-x)$、(C) $\dfrac{2}{3}\cdot(120-x)^{2/3}$

(D) $\dfrac{3}{4\cdot(120-x)}$、(E) $\dfrac{1}{3\cdot(1-x/120)^{2/3}}$

問題２． 以下の２種類の利息がある。

A:名目利率年 4%で、3 ヵ月毎に利息を元本に繰り入れる

B:利力 δ で、連続的に利息を繰り入れる

それぞれに 100 円を投資した結果、9.25 年後、これらの金額が同じであった。δ の値として最も近いものは次のいずれか。計算にあたっては、以下の数値を用いること。(３点)

$\log_e 1.01 = 0.009950$、 $\log_e 1.02 = 0.019803$、 $\log_e 1.03 = 0.029559$、 $\log_e 1.04 = 0.039221$

(A) 0.995%、 (B) 3.922%、 (C) 3.980%、 (D) 4.000%、 (E) 16.000%

問題３．(x)、(y) および (z) に対し、3 人とも生存する間は毎年度末に 3 人にそれぞれ 1/3 ずつを、1 人が死亡した場合は毎年度末に残りの 2 人に 0.35 ずつを、1 人だけが生存している場合は最終生存者の死亡まで毎年度末に 0.4 を給付する年金の現価として正しいものは次のいずれか。(３点)

(A) $0.4\cdot(a_x+a_y+a_z)-0.3\cdot(a_{xy}+a_{yz}+a_{zx})+0.3\cdot a_{xyz}$

(B) $0.4\cdot(a_x+a_y+a_z)-0.1\cdot(a_{xy}+a_{yz}+a_{zx})+0.1\cdot a_{xyz}$

(C) $0.7\cdot(a_x+a_y+a_z)+0.4\cdot(a_{xy}+a_{yz}+a_{zx})+0.4\cdot a_{xyz}$

(D) $0.7\cdot(a_x+a_y+a_z)-0.1\cdot(a_{xy}+a_{yz}+a_{zx})+0.1\cdot a_{xyz}$

(E) $1.0\cdot(a_x+a_y+a_z)+0.7\cdot(a_{xy}+a_{yz}+a_{zx})+0.4\cdot a_{xyz}$

以下、問題４から問題７においては、次の生命表、基数表および年金現価率を使用すること。

x	l_x	d_x	D_x	N_x	$\overline{C}_x$	$\overline{M}_x$
55	94,475.05	517.72	35,185.40	686,041.54	190.45	18,681.92
56	93,957.33	554.35	34,139.11	650,856.14	198.95	18,491.47
57	93,402.98	594.04	33,109.94	616,717.03	208.00	18,292.52
58	92,808.94	633.89	32,096.94	583,607.09	216.53	18,084.52
59	92,175.05	676.56	31,100.21	551,510.15	225.47	17,867.99
60	91,498.49	723.75	30,118.96	520,409.94	235.32	17,642.52
61	90,774.74	782.48	29,151.92	490,290.98	248.21	17,407.20
62	89,992.26	849.53	28,195.74	461,139.06	262.90	17,158.99
63	89,142.73	932.43	27,248.36	432,943.32	281.52	16,896.09
64	88,210.30	1,023.24	26,305.70	405,694.96	301.40	16,614.57
65	87,187.06	1,116.87	25,366.39	379,389.26	320.96	16,313.17
66	86,070.19	1,209.29	24,430.68	354,022.87	339.04	15,992.21
79	61,603.06	2,960.03	12,684.54	107,520.90	602.01	10,187.08
80	58,643.03	3,162.62	11,780.54	94,836.36	627.53	9,585.07
81	55,480.41	3,366.55	10,873.38	83,055.82	651.70	8,957.54

$\ddot{a}_{\overline{20|}}=15.97889$　$\ddot{a}_{\overline{15|}}=12.69091$　$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1|}}=0.98877$

問題４．60 歳支給開始年 12 回期初払終身年金の支給開始時点における年金現価率に最も近いものは次のいずれか。(３点)

(A)16.28、 (B)16.74、 (C)16.82、 (D)17.02、 (E)17.28

問題５．問題４において、支給期間・支払時期を変えずに 20 年間の保証期間を設けるものとする。支給開始時の年金額は変更前と同じとし、支給開始時点の年金現価が変更前と同じになるように、保証期間終了後の年金額を引き下げた。保証期間中の年金額に対する保証期間終了後の年金額の倍率として最も近いものは次のいずれか。なお、保証期間を設けるということは、支給期間中に死亡した場合に、遺族に対して残存保証期間に引き続き同額の年金が支払われることを意味する（問題６も同じ）。(３点)

(A)0.28 倍、 (B)0.32 倍、 (C)0.34 倍、 (D)0.37 倍、 (E)0.41 倍

問題６．問題４において、支給開始年齢を 65 歳に引き上げるとともに、15 年の保証期間を設けた。年金額は、制度変更前後で 60 歳時点の年金現価が同じとなるように、支給期間中を通じて一律の額とする。支払時期は変えない場合、制度変更前の年金額に対する制度変更後の年金額の倍率として最も近いものは次のいずれか。なお、支給開始前に死亡した場合は、本人の死亡時から、本人に支給すべき年金額と同額の年 12 回期初払の 15 年確定年金が遺族に支払われるものとする。(３点)

(A) 1.13 倍、 (B) 1.15 倍、 (C) 1.17 倍、 (D) 1.19 倍、 (E) 1.21 倍

問題７．以下の多重脱退残存表において、生存脱退が発生しない場合の死亡率は前問までの生命表によるものであり、脱退残存表上の生存脱退率は一定である。このとき、$l_{62}^{(T)}$ として最も近いものはいずれか。なお、脱退は互いに独立かつ、年間を通じて一様に発生するものとする。また、計算の過程において死亡脱退率および生存脱退率は小数第６位を四捨五入して小数以下第５位までとせよ。(３点)

x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(w)}$
60	100,000		7,000
61			
62			

(A) 84,416、 (B) 84,470、 (C) 84,904、 (D) 84,960、 (E) 85,013

問題８．Trowbridge モデルの年金制度において、開放型総合保険料方式の制度設立時の給付の取扱いと年間保険料に関する以下の記述について、正しいものはいくつあるか記号で答えよ。(３点)

① 在職中の被保険者の過去勤務期間を通算し、かつすでに退職した従業員にも給付を行う場合 ${}^{O}C={}^{P}C$ となる。

② 在職中の被保険者の過去勤務期間は通算するが、すでに退職した従業員には給付を行わない場合、${}^{O}C={}^{T}C$ となる。

③ 在職中の被保険者の過去勤務期間を通算しない場合、${}^{O}C = v\cdot{}^{U}C$ となる。

④ 給付の対象者を将来の被保険者のみに限った場合、${}^{O}C={}^{In}C$ となる。

(A) 0 個、 (B) 1 個、 (C) 2 個、 (D) 3 個、 (E) 4 個

問題９．Trowbridge モデルの年金制度の保険料に関する以下の説明文または関係式のうち正しいものはいくつあるか記号で答えよ。なお、${}^{A}P_x = \dfrac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \dfrac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}$ とする。(３点)

① ${}^{L}P$ および ${}^{A}P_x$ は、${}^{U}P_x$ の加重平均の形で表現できる。

② ${}^{OAN}P > {}^{L}P$

③ ${}^{A}P_x > {}^{U}P_x$

④ ${}^{A}P_x \geqq {}^{L}P$

(A) 0 個、 (B) 1 個、 (C) 2 個、 (D) 3 個、 (E) 4 個

問題 10. 定常状態に達している年金制度では、60 歳到達後の期初に制度に加入し、65 歳到達と同時に全員脱退する。この制度の期初時点における在職中の被保険者数が 300 人、給与総額が 8,400 万円のとき、新規加入者の加入時給与に最も近いものは次のいずれか、以下の残存人数および給与指数を用いて答えよ。(３点)

年齢	残存人数	給与指数
60	1,000	1.000
61	989	1.054
62	967	1.108
63	934	1.162
64	890	1.216
65	835	1.216

(A) 247,810 円、 (B) 249,680 円、 (C) 251,550 円、 (D) 253,420 円、 (E) 255,290 円

問題11. 定常状態にあるTrowbridgeモデルの年金制度において、ある年度に新規加入者数が従前の$\frac{1}{2}$(新規加入者の年齢は従前通り)となったとする。このとき、この年度に、財政上の過不足が発生するのは次のいずれの財政方式か。該当するものをすべて選べ。なお、いずれの場合も年度末に保険料の見直しを行わず、またこの年度の新規加入者数の変化が、将来加入が見込まれる被保険者の人数に影響を及ぼさないものとする。(３点)

(A)	退職時年金現価積立方式	(B)	単位積立方式
(C)	開放基金方式	(D)	加入年齢方式
(E)	加入時積立方式	(F)	完全積立方式

問題 12. 以下のような一時金を支給する制度を考える。

加入年齢：20 歳

定年：なし

一時金額：y 歳で制度から脱退したとき即時に $\bar{s}_{\overline{y-20}|} \times 100{,}000$ 円の一時金を支払う

保険料の支払いおよび制度からの脱退：連続的に発生

予定利率：年 2.5%

$\bar{s}_{\overline{y-20}|}$ の計算の基となる利率（1 年あたりの実質利率）を j、脱退力を μ としたとき、（j, μ）について以下の 2 通りを検討した。

①（j, μ）＝（2.5%,0.10）

②（j, μ）＝（2.0%,0.11）

この 2 通りの加入年齢方式による 1 人あたりの標準保険料（1 年あたり）の組み合わせとして正しいものはいずれか。必要があれば、以下の数値を用いよ。(３点)

$\log_e 1.025 = 0.024693$、　$\log_e 1.02 = 0.019803$

(A)	① 95,764 円	② 95,338 円
(B)	① 100,000 円	② 95,338 円
(C)	① 100,000 円	② 95,744 円
(D)	① 104,652 円	② 100,000 円
(E)	① 105,141 円	② 104,676 円

問題 13. ある最終給与比例制、加入年齢方式の年金制度で、n 年度末と $n+1$ 年度末の貸借対照表、$n+1$ 年度の損益計算書、および $n+1$ 年度の未積立債務変動要因分析が以下のとおりであった。$n+1$ 年度末の給付金支払い後に、予定利率と同率の動態的昇給（ベース・アップ）が実施されていた場合、運用利差損の額として最も近いものは次のいずれか。なお、年金受給権者は存在せず、給付金は年 1 回期末払、保険料は年 1 回期初払とし、特別保険料は徴収していないものとする。また、責任準備金の計算において動態的昇給率は織り込んでいないため、ベース・アップ後の責任準備金とベース・アップ前の責任準備金との差額を「ベース・アップによる差損益」としている。（３点)

n 年度末貸借対照表

積立金	7,000	責任準備金	7,500
未積立債務	500		

$n+1$ 年度末貸借対照表

積立金	6,991	責任準備金	7,771
未積立債務	780		

$n+1$ 年度損益計算書

給付金	180	保険料	100
$n+1$ 年度末責任準備金	7,771	利息収入	71
		n 年度末責任準備金	7,500
		未積立債務増加	280

$n+1$ 年度未積立債務変動要因分析

未積立債務期初残高	500
未積立債務期初残高にかかる利息相当額	α
運用利差損	β
責任準備金にかかる発生不足金	
(脱退差)	9
(ベース・アップによる差損益)	γ
未積立債務期末残高	780

(A) 8　(B) 87　(C) 89　(D) 97　(E) 100

問題 14. A 社は、年金制度について、以下のような制度変更を検討している。

（現行制度の給付内容：すべて一時金給付）
定年退職の場合：退職一時金額＝退職時の基本給×勤続年数
定年退職以外の場合：退職一時金額＝退職時の基本給×勤続年数×0.5
（変更案：すべて一時金給付）
全ての退職：退職一時金額＝退職時の基本給×勤続年数
ここで、現行制度の給与比例制の標準保険料率が 77.9%であるとき、変更後の標準保険料率として最も近いものは次のいずれか。なお、計算の前提は以下のとおりであり、制度変更前後で変わらない。(３点)

- ・ 財政方式：加入年齢方式
- ・ 特定年齢：30 歳（30 歳到達直後の期初に制度に加入）
- ・ 定年年齢：60 歳（60 歳到達直後の期末に制度から脱退）
- ・ 予定利率：2.0%
- ・ 予定昇給率：1 年あたり一律 3.0%（定年退職者発生前の期末に昇給）
- ・ 予定退職率（死亡退職を含む）：すべての年齢で一律 5.0%
- ・ 保険料は期初払い、定年退職者を除く中途退職は期初（保険料支払い後）に発生するものとする。
- ・ $1.02^{30}=1.81136$、$1.03^{30}=2.42726$、$1.05^{30}=4.32194$、$0.95^{30}=0.21464$

(A) 106.5、 (B) 110.8、 (C) 115.0、 (D) 116.7、 (E) 121.1

問題 15. 定常状態の年金制度（積立金：5,000）において、積立の促進を図るため、予定利率および未積立債務の償却方法について以下の 2 つの方法を考えた。運用利差損以外の差損益は発生しない前提において、変更後 3 年目が終了した時点での「方法Ｉの積立金」－「方法IIの積立金」として最も近いのは次のいずれか。(３点)

方法	予定利率	責任準備金	未積立債務の償却方法
I	年 3.0%	10,000	当初未積立債務残高を 10 年間元利均等償却する。
II	年 5.0%	7,000	前年度末未積立債務残高の一定割合 35%を償却する。

（注）方法IIの初年度は、当初未積立債務残高の一定割合を償却するものとする。

（前提）保険料の払込時期：年 1 回期初払
給付：毎年 800（期末払）
積立金の運用利回り：年 3.0%

$$\ddot{a}_{\overline{10|}}^{(i=3.0\%)}=8.78611、\ddot{a}_{\overline{10|}}^{(i=5.0\%)}=8.10782$$

(A) 201、 (B) 221、 (C) 241、 (D) 261、 (E) 281

問題 16. A 社の年金制度で第 n 年度末に財政再計算を行った結果、給付現価等の数値は次のとおりとなった。以下の空欄に当てはまる数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、保険料は年 1 回期初払いとし、解答は、百分率表示で小数第 2 位を四捨五入して小数以下第 1 位までとする。(８点)

将来加入が見込まれる被保険者の給付現価		10,000 百万円
在職中の被保険者の給付現価		45,000 百万円
	うち、過去の加入期間に対する給付現価	30,000 百万円
年金受給権者の給付現価		15,000 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価		20,000 百万円
在職中の被保険者の給与現価		30,000 百万円
積立金		36,000 百万円
20 年確定年金現価率（期初払）		12.6
在職中の被保険者の総給与		2,750 百万円

(1) 財政方式として開放基金方式を採用しているとき、標準保険料率および 20 年償却とした場合の特別保険料率を求めよ。なお、積立金が責任準備金を上回る場合は、標準保険料率の欄に収支相等する保険料率を記載し、特別保険料率の欄には 0.0 を記載するものとする。

標準保険料率： $\boxed{①}$ %、特別保険料率： $\boxed{②}$ %、

(2) A 社は会社の分割に伴い、年金制度を分割することとなり、第 n 年度末を計算基準日として保険料の再計算を実施した。分割後の年金制度をそれぞれ制度 A1、制度 A2 としたとき、各制度の給付現価および給与現価は以下のとおりとなった。

（制度 A1）

将来加入が見込まれる被保険者の給付現価		7,000 百万円
在職中の被保険者の給付現価		30,000 百万円
	うち、過去の加入期間に対する給付現価	20,000 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価		14,000 百万円
在職中の被保険者の給与現価		20,000 百万円
在職中の被保険者の総給与		1,900 百万円

（制度 A2）

将来加入が見込まれる被保険者の給付現価		- 百万円
在職中の被保険者の給付現価		15,000 百万円
	うち、過去の加入期間に対する給付現価	10,000 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価		- 百万円
在職中の被保険者の給与現価		10,000 百万円
在職中の被保険者の総給与		850 百万円

このとき、以下の条件による制度 A1 の保険料率は $\boxed{③}$ %、制度 A2 の保険料率は $\boxed{④}$ %となる。

（条件）

1. 財政方式は、制度 A1 は開放基金方式、制度 A2 は閉鎖型総合保険料方式とする。なお、保険料が標準保険料と特別保険料に区分される場合は未積立債務の償却年数を 20 年とし、保険料率の合計を記入する。
2. 第 n 年度末時点での年金受給権者に対しては、制度 A1 から給付を行うものとする。
3. 制度 A1 および制度 A2 で使用する基礎率は、分割前の A 社の年金制度で使用した基礎率を引き続き使用するものとする。
4. 第 n 年度末の積立金については、分割前の制度における年金受給権者の責任準備金と同額を制度 A1 が引き継ぎ、年金受給権者の責任準備金相当額控除後の積立金は、制度 A1 と制度 A2 の在職中の被保険者の過去の加入期間に対する給付現価の比率で按分する。

問題 17. Trowbridge モデルに基づく年金制度における開放基金方式の保険料について、以下の空欄に当てはまる式、記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。（９点）

開放基金方式の 1 人あたりの保険料 ${}^{OAN}P$ は、以下のとおり表わされる。

$$ {}^{OAN}P = \frac{S_{FS}^a + S^f}{G^a + G^f} $$

$$ S_{FS}^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{\boxed{①}}{x_r - x_e} \frac{N_{x_r}}{D_x} \quad 、\quad S^f = \boxed{②} \cdot l_{x_e}^{(T)} \frac{N_{x_r}}{D_{x_e}} $$

$$ G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{D_y}{D_x} \quad 、\quad G^f = \boxed{②} \cdot l_{x_e}^{(T)} \sum_{y=x_e}^{x_r-1} \frac{D_y}{D_{x_e}} $$

このうち、S_{FS}^a については、以下のように変形することができる。

$$ \begin{aligned} S_{FS}^a &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \sum_{y=x}^{\boxed{③}} \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_x} \\ &= \sum_{y=x_e}^{x_r-1} \sum_{x=\boxed{⑤}}^{\boxed{④}} l_x^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_x} \\ &= \sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_y} \sum_{x=\boxed{⑤}}^{\boxed{④}} v^{y-x} \end{aligned} $$

また、S^f については、以下のように変形することができる。

$$S^f = \boxed{②} \cdot \sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_{x_e}^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_{x_e}}$$

$$= \boxed{②} \cdot \sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_y} \cdot \boxed{⑥}$$

$$= \sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_y} \cdot \sum_{j=\boxed{⑦}}^{\infty} v^j$$

以上より、

$$S_{FS}^a + S^f = \sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_y} \cdot \left(\sum_{x=\boxed{⑤}}^{\boxed{④}} v^{y-x} + \sum_{j=\boxed{⑦}}^{\infty} v^j \right)$$

$$= \sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)} \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_y} \times \boxed{⑧} \qquad \cdots[1]$$

一方、

$$G^a + G^f = \boxed{⑨} \qquad \cdots[2]$$

[1]と[2]により、

$$^{OAN}P = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)} \cdot \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_y}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}}$$

これは、^{OAN}P が、単位積立方式の年齢別保険料の、その年齢の被保険者数による加重平均値で表わされることを示している。

問題 18. Trowbridge モデルの年金制度において、次の各財政方式の定常状態における積立金を表わす式として正しいものの記号を選び、解答欄の所定欄に記入せよ。当てはまるものが複数ある場合はすべて記入せよ。なお、式中の S は制度全体の給付現価の合計とする。(12 点)

①退職時年金現価積立方式
②賦課方式
③加入時積立方式
④平準積立方式
⑤単位積立方式
⑥開放基金方式

(A) 0、 (B) $l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$、 (C) $\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$、 (D) $v\cdot\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$、 (E) $S-\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$、

(F) $\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$、(G) $\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$ 、

(H) $\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$、(I) $\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x+\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{D_x\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$、

(J) $\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}\left(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}\right)\cdot l_x^{(T)}\cdot\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$、 (K) $S-l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\ddot{a}_\infty$、

(L) $\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x+\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}\left(\left(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}\right)\cdot\sum_{y=x_e}^{x-1} l_y^{(T)}\cdot(1+i)^{x-y}\right)$ 、(M) $S-l_{x_e}^{(T)}\cdot\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$、

(N) S、 (O) $\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$、 (P) $\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$、

(Q) $\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x+\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}\left(\left(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}\right)\cdot\sum_{y=x_e}^{x} l_y^{(T)}\cdot(1+i)^{x-y}\right)$

問題 19. 定年退職者に定年到達時から終身年金を支払う年金制度について考える。支給開始時点の年金額は、制度設立からの経過年数に応じて 1 年あたり α の割合で増加し、支給開始以降の年金額は支給開始からの経過年数に応じて 1 年あたり β の割合で増加する。制度導入時点の定年退職者および在籍中の被保険者の過去勤務期間をすべて通算するものとする。

制度設立後（$\omega - x_r$）年が経過した以降のある時点（t）の被保険者および受給権者の状況は以下のとおりである。

l_x ： x 歳の在職中の被保険者数（$x_e \leqq x < x_r$）または受給権者数（$x_r \leqq x \leqq \omega$）

w_x ： x 歳の被保険者の 1 人あたり給与

なお、l_x は脱退残存表（$x_e \leqq x < x_r$）および生命表（$x_r \leqq x \leqq \omega$）に従い、w_x は静態的昇給率にしたがっている。また、在職中の被保険者の給与および新たに制度に加入する被保険者の加入時給与は、動態的昇給率（ベース・アップ）として 1 年あたり一律 α の割合で増加するものとする。

保険料および給付の支払は連続払い、制度からの脱退、死亡および給与の変化はすべて連続的に発生するものとして、以下の問いに答えよ。 (14 点)

（1）時点 t における支給開始時点（x_r 歳）の年金額を B とすると、同時点の x_r ＋1 歳の年金額を求めよ。

（2）この年金制度を賦課方式で運営するものとし、保険料は給与比例で、在職中の被保険者の給与に対して一律の保険料率を設定するものとする。時点 t における収支相等を表わす式（1 年換算したもの）を、保険料率を P として、積分を用いて表わせ。また、時点 $(t+1)$ において収支相等する保険料率は、やはり P であることを示せ。

（3）予定利率が、支給開始時点の年金額の増加率および動態的昇給率 α と等しいとき、時点 t における x 歳の被保険者 1 人あたりの給付現価、保険料収入現価、x_r 歳（ちょうど年金の支給開始年齢に到達した受給権者）1 人あたりの給付現価をそれぞれ求めよ。なお、給付現価の計算には将来の年金額の増加を見込み、保険料収入現価の計算には静態的昇給率のほか動態的昇給率を見込むものとする。また、解答にあたっては B および P はそのまま使用してよい。

（4）さらに、支給開始以降の年金増加率 β が α と等しく、静態的昇給率が 0（つまり、w_x が年齢に関わらず一定額 w になるものとする）の場合、時点 t における制度全体の責任準備金が

責任準備金＝年間保険料総額×(受給期間＋積立期間)

となることを示せ。ここで、受給期間を各受給権者の支給開始からの期間の平均とし、積立期間を各被保険者の支給開始までの期間の平均とする。

なお、制度全体の責任準備金とは、受給権者および在職中の被保険者全体の給付現価から、在職中の被保険者全体の保険料収入現価を控除したものである。

問題 20. ある年金制度は、保険料の払い込みや給付の支払いのためのαファンドと、αファンドから積立金の一部を受け入れ、資産運用に特化したβファンドを設定して運営を行っている。αファンドへ払い込まれる保険料をP、αファンドからβファンドへ移される移管金をQ（ただし$Q < P$）、βファンドからαファンドへ戻される受管金をR、αファンドから支払われる給付をSとするとき、以下の問いに答えよ。

なお、保険料の払い込みとαファンドからβファンドへの移管は年 1 回期初に、給付の支払いとβファンドからαファンドへの受管は年 1 回期末に発生するものとする。(12 点)

(1) この制度が定常状態にあるとき、αファンドの積立金F^{α}およびβファンドの積立金F^{β}をそれぞれ求めよ。ただし、αファンドの利回りをi、βファンドの利回りをjとする。

(2) βファンドにおいて、ある年度の利回りがjからj'（$0 < j' < j$）に低下したため、年度末のβファンドの積立金が変動しないように、αファンドへの受管金をRから$R - \Delta R$へ引き下げた。このとき、他には変動がなかったものとして、この年度の受管金（$R - \Delta R$）をR、Q、jおよびj'を用いて表わせ。

(3) (2)において、翌年度以降も引き続きβファンドの利回りがj'のまま推移したため、第n年度末にαファンドが枯渇することとなった。受管金が$R - \Delta R$となった以外、他には変動がなかったとすると、βファンドの利回りが低下した最初の年度を第 1 年度として、nをF^{α}、i、ΔRを用いて表わせ。

以上

平成 21 年 10 月 15 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１	問題２	問題３	問題４	問題５
A	C	B	C	C
問題６	問題７	問題８	問題９	問題 10
D	E	B	D	D
問題 11	問題 12	問題 13	問題 14	問題 15
C、F	C	C	A	D

※問題 9 の③式は、本来は（左辺≧右辺）となるべきものであるが、試験要領に記載した参考書の記述は③式の通りであるため、③式を正しいものとしたＥの選択肢も正解としている。

問題16	①	②	③	④
	50.0	26.0	75.1	80.0

問題17	①	②	③	④	⑤
	$x_r - x$	$\dfrac{v}{d}$ $\left(\dfrac{v}{1-v}\right)$	$x_r - 1$	y	x_e
	⑥	⑦	⑧	⑨	
	v^{y-x_e}	$y - x_e + 1$	$\dfrac{1}{d}$ $\left(\dfrac{1}{1-v}\right)$	$\dfrac{1}{d}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}$ $\left(\dfrac{1}{1-v}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y^{(T)}\right)$	

問題18	①	②	③
	C、K	A	I
	④	⑤	⑥
	L	H	H

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 19　←問題番号を記入すること。

(1)　時点（$t-1$）における支給開始時点の年金額は $\dfrac{1}{1+\alpha}B$、したがって 1 年経過後の年金額（時点 t における（x_r+1）歳の年金額）は $\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}B$

(2)　時点 t における、x 歳（$x < x_r$）の在職中の被保険者の給与は $w_x l_x$、x 歳（$x \geqq x_r$）の受給者の年金額は（1）より $\left(\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^{x-x_r}B$ となるので、時点 t における収支は、

$$P\int_{x_e}^{x_r} w_x l_x\,dx = B\int_{x_r}^{\omega}\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^{x-x_r} l_x\,dx$$

時点 $(t+1)$ においては、x 歳の被保険者の 1 人当たり給与は $(1+\alpha)w_x$、支給開始時点の年金額は $(1+\alpha)B$ であることから、上式の両辺に $(1+\alpha)$ を乗じたものが時点 $(t+1)$ における収支となる。よって、時点 $(t+1)$ において収支相当する保険料率は、やはり P である。

(3)　以下の算式において、予定利率を i とし、$i=\alpha$ であることを用いる。

○ x 歳の被保険者の一人当たり給付現価：

支給開始時点の年金額は $(1+\alpha)^{x_r-x}B$、その後は 1 年当たり $(1+\beta)$ の割合で増加。

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{x_r-x}\frac{l_{x_r}}{l_x}(1+\alpha)^{x_r-x}B\int_{x_r}^{\omega}(1+\beta)^{y-x_r}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{y-x_r}\frac{l_y}{l_{x_r}}dy = B\int_{x_r}^{\omega}\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^{y-x_r}\frac{l_y}{l_x}dy$$

○ x_r 歳の受給者の一人当たり給付現価：上式で、$x=x_r$ としたもの。

$$B\int_{x_r}^{\omega}\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^{y-x_r}\frac{l_y}{l_{x_r}}dy$$

○ x 歳の在職中の被保険者の一人当たり保険料収入現価：

y 歳時点（$x \leqq y < x_r$）の保険料率は P で一定、動態的昇給率を考慮した給与は $w_y(1+\alpha)^{y-x}$。

$$P\int_{x}^{x_r} w_y(1+\alpha)^{y-x}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{y-x}\frac{l_y}{l_x}dy = P\int_{x}^{x_r} w_y\frac{l_y}{l_x}dy$$

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 19　←問題番号を記入すること。

(4)　時点tにおけるx ($\geqq x_r$)歳の年金受給者の年金額は、(1)より$(\frac{1+\beta}{1+\alpha})^{x-x_r}B=B$。$x$歳以降 1 年当たり$1+\beta=1+\alpha$の割合で増加することを考慮すると、この受給者の給付現価（年金現価）は

$$B\int_x^\omega (1+\alpha)^{y-x}\left(\frac{i}{1+i}\right)^{y-x}\frac{l_y}{l_x}dy = B\int_x^\omega \frac{l_y}{l_x}dy$$

となる。

制度全体の責任準備金V は、上式および(3)で$\beta=\alpha, w_x=w$とした式を用いると以下の通りとなる。

$$V=\int_{x_r}^\omega l_x(B\int_x^\omega \frac{l_y}{l_x}dy)dx+\int_{x_e}^{x_r} l_x(B\int_{x_r}^\omega \frac{l_y}{l_x}dy-P\int_x^{x_r} w\frac{l_y}{l_x}dy)dx$$

$$=B\int_{x_r}^\omega (\int_x^\omega l_y dy)dx+B\int_{x_e}^{x_r}(\int_{x_r}^\omega l_y dy)dx-P\int_{x_e}^{x_r}(\int_x^{x_r} wl_y dy)dx$$

$$=B\int_{x_r}^\omega l_y(\int_{x_r}^y dx)dy+(B\int_{x_r}^\omega l_y dy)\int_{x_e}^{x_r}dx-P\int_{x_e}^{x_r} wl_y(\int_{x_e}^y dx)dy$$

（∵第一項と第三項について、積分範囲の順序を入れ替え）

$$=\frac{\left(P\int_{x_e}^{x_r} wl_y dy\right)\left(\int_{x_r}^\omega l_y\left(y-x_r\right)dy\right)}{\int_{x_r}^\omega l_y dy}+\left(P\int_{x_e}^{x_r} wl_y dy\right)\left(x_r-x_e\right)-P\int_{x_e}^{x_r} wl_y\left(y-x_e\right)dy$$

(∵(2)と$\beta=\alpha, w_x=w$により、$B\int_{x_r}^\omega l_y dy=P\int_{x_e}^{x_r} wl_y dy$)

$$=\frac{\left(P\int_{x_e}^{x_r} wl_y dy\right)\left(\int_{x_r}^\omega l_y\left(y-x_r\right)dy\right)}{\int_{x_r}^\omega l_y dy}+P\int_{x_e}^{x_r} wl_y\left(x_r-y\right)dy$$

$$=\left(P\int_{x_e}^{x_r} wl_y dy\right)\left(\frac{\int_{x_r}^\omega l_y\left(y-x_r\right)dy}{\int_{x_r}^\omega l_y dy}+\frac{\int_{x_e}^{x_r} l_y\left(x_r-y\right)dy}{\int_{x_e}^{x_r} l_y dy}\right)$$

この最後の式は、年間保険料総額×(受給期間＋積立期間)　を表している。

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 20　←問題番号を記入すること。

(1)　発生時期に注意して、α ファンドおよび β ファンドの一年間の積立金の動きは以下のとおり。

$$\left(F^{\alpha}+P-Q\right)\cdot(1+i)+R-S=F^{\alpha}、\quad \left(F^{\beta}+Q\right)\cdot(1+j)-R=F^{\beta}$$

したがって、積立金は以下のとおり。

$$F^{\alpha}=\frac{S-R-(P-Q)\cdot(1+i)}{i}、F^{\beta}=\frac{R-Q\cdot(1+j)}{j}$$

(2)　同様に、ある年度の β ファンドの積立金の動きは $\left(F^{\beta}+Q\right)\cdot(1+j')-(R-\Delta R)=F^{\beta}$ となる。

$$\begin{aligned}R-\Delta R&=\left(F^{\beta}+Q\right)\cdot(1+j')-F^{\beta}\\&=\left\{\frac{R-Q\cdot(1+j)}{j}+Q\right\}\cdot(1+j')-\frac{R-Q\cdot(1+j)}{j}\\&=\frac{(R-Q)\cdot(1+j')-R+Q\cdot(1+j)}{j}\\&=\frac{R\cdot j'+Q\cdot(j-j')}{j}\end{aligned}$$

(3)　ある年度以降、α ファンドが β ファンドから受入れる受換金は $R-\Delta R$ となるため、第 n 年度末の α ファンドの積立金は $F^{\alpha}-\Delta R\cdot s_{\overline{n|}}$ となる。第 n 年度末に α ファンドが枯渇するので、

$$F^{\alpha}-\Delta R\cdot s_{\overline{n|}}=0$$

となる。

$$\Delta R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=F^{\alpha}$$

$$(1+i)^{n}=\frac{F^{\alpha}\cdot i}{\Delta R}+1$$

より、

$$n=\frac{log\left(\dfrac{F^{\alpha}\cdot i}{\Delta R}+1\right)}{log(1+i)}$$