

年金数理(問題)

本問題においては、以下のとおりとする。

1. 「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。
2. 「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。
3. 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。

問題 1 から 15 までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題 16 から 20 までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題 1. 男性と女性の出生数が同一である人口を考える。男性の死力 μ_x^m 、女性の死力 μ_x^f が次のように与えられたとき、人口全体に対する ${}_{30}q_{60}$ に最も近いものは次のいずれか。なお $e = 2.718$ とする。(3 点)

$$\mu_x^m = \frac{1}{40}, \quad \mu_x^f = \frac{1}{60}$$

- (A) 0.15 (B) 0.25 (C) 0.35 (D) 0.45 (E) 0.55

問題 2. 定常人口において $e_x = 75 \cdot \left(1 - \frac{x}{90}\right)$ (ただし $0 \leq x < 90$) となるとき、この人口の平均年齢に最も近いものは次のいずれか。(3 点)

- (A) 39.6 歳 (B) 40.9 歳 (C) 41.2 歳 (D) 42.5 歳 (E) 44.2 歳

問題 3. 次の場合に、 $(\bar{Ia})_x$ の値として最も近いのは、次のいずれか。(3 点)

予定利率 : 2.5%

死力 : 0.01

計算に必要があれば、以下の数値を用いよ。

$$\log 1.025 = 0.024693, \quad e^{0.01} = 1.01005$$

- (A) 816.52 (B) 830.78 (C) 830.84 (D) 845.35 (E) 860.11

問題4. (x) , (y) および (z) の3生命に対して、3人とも生存する場合は毎年度末に3、第1死亡後は2、第2死亡後は1を最終生存者の死亡まで給付する年金の現価は次のいずれか。(3点)

- (A) $a_x + a_y + a_z$
- (B) $(a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}) + (a_x + a_y + a_z)$
- (C) $a_{xyz} - (a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}) + (a_x + a_y + a_z)$
- (D) $a_{xyz} - 2 \cdot (a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}) + 2 \cdot (a_x + a_y + a_z)$
- (E) $3 \cdot a_{xyz} + 2 \cdot (a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}) + (a_x + a_y + a_z)$

問題5. 60歳支給開始年4回期末払10年確定年金の55歳時点の年金現価率として最も近いものは次のいずれか。なお、予定利率2.5%、給付利率2.0%とし、支給開始前に本人が死亡した場合は遺族に一時金(年金年額に、給付利率による年4回期末払10年確定年金現価率を乗じた金額)を支給、支給開始後に本人が死亡した場合は遺族に引き続き年金を支給するものとする。必要であれば以下の数値および基数表を用いよ。(3点)

$1.025^{10} = 1.28008$, $1.020^{10} = 1.21899$

x	q_x	l_x	d_x	D_x	N_x	\bar{C}_x	\bar{M}_x
55	0.00548	100,000.0	548.0	100,000.000	556,340.031	541.276	3,622.944
56	0.00590	99,452.0	586.8	97,026.341	456,340.031	565.463	3,081.668
57	0.00636	98,865.2	628.8	94,101.321	359,313.690	591.157	2,516.205
58	0.00683	98,236.4	671.0	91,222.263	265,212.369	615.445	1,925.048
59	0.00734	97,565.4	716.1	88,389.437	173,990.106	640.791	1,309.603
60	0.00791	96,849.3	766.1	85,600.669	85,600.669	668.812	668.812

- (A) 7.80761 (B) 7.82894 (C) 8.00086 (D) 8.00741 (E) 8.19645

問題6. Trowbridge モデルにおいて単位積立方式と退職時年金現価積立方式の制度全体の保険料の比率

$\frac{{}^U C}{T C}$ は次のいずれか。(3点)

- (A) $\frac{1}{x_r - x_e} \cdot v^{x_r - x_e}$ (B) $\frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_{x_e}}$ (C) $\frac{1}{x_r - x_e} \cdot a_{\overline{x_r - x_e}|}$
- (D) $\frac{1}{x_r - x_e} \cdot \ddot{a}_{x_r}$ (E) $\frac{1}{x_r - x_e} \cdot \ddot{a}_{x_e: \overline{x_r - x_e}|}$

問題 7. 定年退職者に脱退翌年度の期初から年額 1 の終身年金を支払う年金制度について、開放型総合保険料方式に関する次の記述のうち正しいものはいくつあるか記号で答えよ。(3 点)

- ア. 標準保険料、特別保険料の区別がない。
- イ. 積立水準が低下した場合、それを回復することはできない。
- ウ. 定常人口ではない人員構成の集団にこの財政方式を適用した場合、新規加入、脱退、死亡および運用利回りが予定通りであったとしても標準保険料は変動する。
- エ. 定常状態の場合、保険料および積立金は常に単位積立方式に一致する。

- (A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 3 個 (E) 4 個

問題 8. 給付の計算式が「制度脱退時の給与×支給率」で与えられる年金制度で財政再計算を行った結果、加入年齢方式による標準保険料率が P_N 、10 年元利均等償却による特別保険料率が P_{PSL} となった。財政再計算と同時に給与を一律 2 分の 1 倍、最終給与に乗じる年金の支給率を一律 2 倍とする制度変更を行った場合、標準保険料率および特別保険料率の組み合わせとして正しいものは次のいずれか。なお、制度に年金受給権者は存在せず、積立金は F 、財政再計算後制度変更前の給付現価および給与現価を S および G とし、制度変更前の在職中の被保険者の総給与を LB とする。また、制度変更によって脱退率・昇給率などの計算の基礎に変更はないものとする。(3 点)

- (A) 標準保険料率 P_N 、特別保険料率 $2P_{PSL} - \frac{S}{LB \cdot \ddot{a}_{10|}}$
- (B) 標準保険料率 P_N 、特別保険料率 $P_{PSL} + \frac{S}{LB \cdot \ddot{a}_{10|}}$
- (C) 標準保険料率 $2P_N$ 、特別保険料率 $P_{PSL} - \frac{P_N \cdot G}{LB \cdot \ddot{a}_{10|}}$
- (D) 標準保険料率 P_N 、特別保険料率 P_{PSL}
- (E) 標準保険料率 $2P_N$ 、特別保険料率 $2P_{PSL}$

問題 9. 定常状態のある集団では、生存脱退率 $q_x^{(w)}$ および死亡脱退率 $q_x^{(d)}$ が次のように与えられている。

$$q_x^{(w)} = \begin{cases} q & (x = x_a) \\ 0 & (x \neq x_a) \end{cases} \quad (x_e < x_a < x_r - 1, \quad 0 < q < 1)$$

$$q_x^{(d)} = 0$$

この集団に次の年金制度を導入するとき、加入年齢方式の標準保険料として正しいものは次のいずれか。なお、加入年齢を x_e 、定年年齢を x_r とし、保険料は期初払いとする。(3点)

〔制度内容〕

定年到達者：毎年 1 の年金を脱退時より終身にわたり年 1 回期初に支給

中途脱退者：脱退年度の期末に 1 の一時金を支給

$$(A) \frac{(1-v) \cdot \{q \cdot v^{x_a-x_e+1} + (1-q) \cdot v^{x_r-x_e} \cdot \ddot{a}_{x_r}\}}{(1-v^{x_a-x_e+1}) + (1-q) \cdot (v^{x_a-x_e+1} - v^{x_r-x_e})} \quad (B) \frac{(1-v) \cdot \{q \cdot v^{x_a-x_e} + (1-q) \cdot v^{x_r-x_e} \cdot \ddot{a}_{x_r}\}}{(1-v^{x_a-x_e}) + (1-q) \cdot (v^{x_a-x_e} - v^{x_r-x_e})}$$

$$(C) \frac{q \cdot v^{x_a-x_e} + (1-q) \cdot v^{x_r-x_e} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{(1-v^{x_a-x_e}) + (1-q) \cdot (v^{x_a-x_e} - v^{x_r-x_e})} \quad (D) \frac{q \cdot v^{x_a-x_e} + (1-q) \cdot v^{x_r-x_e} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{(1-v^{x_a-x_e+1}) + (1-q) \cdot (v^{x_a-x_e+1} - v^{x_r-x_e})}$$

$$(E) \frac{(1-v) \cdot \{q \cdot v^{x_a-x_e+1} + (1-q) \cdot v^{x_r-x_e} \cdot \ddot{a}_{x_r}\}}{(1-v^{x_a-x_e}) + (1-q) \cdot (v^{x_a-x_e} - v^{x_r-x_e-1})}$$

問題 10. ある年金制度の初期未積立債務 U_0 の償却方法として以下の①～④の 4 通りを考える。初期被保険者数が L_0 人、予定利率が年 2.0% の前提で、3 年後の未積立債務の大小関係について正しいものは次のいずれか。ただし、被保険者数は前年比 3% ずつ減少し、後発債務の発生はなく、特別保険料は年 1 回期初払いとし、未積立債務は予定利率により増加するものとする。(3点)

①毎年 U_0 の 21%

②毎期初現在未積立債務残高（当年度分の償却前）の 28% 相当額。

③ $(U_0 \times 0.22) \div L_0$ を一人あたりの特別保険料とし、毎期初の被保険者人数分の償却を行う。

④毎年 $U_0 \times (1/\ddot{a}_{51})$

- (A) ③ < ① < ② < ④ (B) ③ < ② < ① < ④ (C) ② < ① < ③ < ④
 (D) ③ < ④ < ② < ① (E) ④ < ② < ① < ③

問題 11. 毎年、期初に満 20 歳の新規被保険者 800 人が制度に加入し、満 60 歳に到達した翌年度の期初に 300 の一時金を支給する制度がある。 x 歳の脱退率は $q_x = 1/(100 - x)$ であり、被保険者集団は定常人口になっているとき、賦課方式による被保険者一人当たりの保険料に最も近いものは次のうちいずれか。なお、保険料は年 1 回期初払いとし、満 60 歳に到達して翌年度の期初までに死亡した者に対しては、翌年度の期初に遺族に同額の一時金を支給するものとする。(3 点)

(A) 4.88 (B) 4.96 (C) 5.04 (D) 5.12 (E) 5.20

問題 12. A 社と B 社が合併することとなり、それに伴い、両社の退職給付制度を統合することとなった。以下の条件で統合直前の A 社の年間保険料予定額に対する、統合後の年間保険料の倍率として、最も近いものは次のいずれか。(3 点)

- ・ A 社の退職給付制度は加入年齢方式で運営され、未積立債務はない。
- ・ B 社の退職給付制度は賦課方式で運営され、積立金はない。
- ・ B 社は、総人員、総給与とも A 社の 60% の規模であり、被保険者の加入期間の分布、年齢毎の人数、給与の分布は等しい。
- ・ B 社の給付水準は、A 社の一律 1.2 倍である。
- ・ A 社および B 社に年金受給権者は存在していない。
- ・ 統合と同時に A 社の給付水準を B 社に合わせる制度変更を行った(過去勤務期間は全て通算する)。
- ・ 統合後の退職給付制度は加入年齢方式で運営するものとし、統合および制度変更後の未積立債務は 10 年間の元利均等償却(定額償却)とする。
- ・ 統合直前の A 社の積立金 : 10,000
- ・ 統合直前の状態による A 社年間標準保険料予定額 : 1,800
- ・ 10 年確定年金現価率 : 8.1109

(A) 1.75 (B) 2.15 (C) 2.55 (D) 2.95 (E) 3.35

問題 13. 開放型総合保険料方式により財政運営をおこなっている年金制度が定常状態にある。ある年度(第 1 年度とする)以降、予定利率 i ($0 < i < 1$) に対して運用利回りが $i - \Delta i$ ($0 < \Delta i < i$) となった。運用利回り以外は予定通り推移した場合、第 n 年度の保険料 C_n は定常状態の保険料 C および積立金 F を用いてどのように表せるか。ただし、保険料および給付は年 1 回期末に発生するものとし、保険料は毎期初に予定利率を i として見直すものとする。(3 点)

- (A) $C + F \cdot i \cdot \frac{1 - (\Delta i)^{n-1}}{1 - \Delta i}$ (B) $C + F \cdot \Delta i \cdot \frac{1 - (\Delta i)^{n-1}}{1 - \Delta i}$ (C) $C + F \cdot i \cdot \frac{1 - (\Delta i)^{n-1}}{1 - \Delta i} \cdot \Delta i$
- (D) $C + F \cdot i \cdot \{1 - (1 - \Delta i)^{n-1}\}$ (E) $C + F \cdot \Delta i \cdot \{1 - (1 - \Delta i)^{n-1}\}$

問題 14. 次のような定常状態にある最終給与比例の年金制度を考える。

加入時期：年 1 回期初

給付内容：「脱退時の給与× α 」を一時金として支給

脱退時期：年 1 回期末脱退（死亡による脱退は発生しない）

昇給時期：年 1 回期初昇給（保険料拠出後に昇給）

保険料の拠出時期：年 1 回期初拠出

財政方式：加入年齢方式

ある年度において、期初 x 歳の加入者数 l_x および一人当たり給与 b_x が 1 年後に予定の l_{x+1} 、 b_{x+1} ではなく l'_{x+1} 、 b'_{x+1} となったとき、この年度の差損益は次のどれか。（3 点）

なお、記号の意味は次のとおりである。

x_e ：特定年齢（加入年齢） x_r ：定年年齢（最終年齢）

V_x ： x 歳における給与 1 に対する責任準備金（ただし、 $V_{x_r} = \alpha$ とする）

P ：保険料率（給与 1 に対する保険料）、 i ：予定利率

- (A)
$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (b'_{x+1} \cdot l'_{x+1} - b_{x+1} \cdot l_{x+1}) \cdot (-V_{x+1}) + b_x \cdot (l'_{x+1} - l_{x+1}) \cdot \alpha$$
- (B)
$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (b'_{x+1} - b_{x+1}) \cdot (l'_{x+1} - l_{x+1}) \cdot (-V_{x+1}) + b_x \cdot (l'_{x+1} - l_{x+1}) \cdot \alpha$$
- (C)
$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (b'_{x+1} \cdot l'_{x+1} - b_{x+1} \cdot l_{x+1}) \cdot (-V_{x+1} + \alpha) - (b'_{x+1} - b_{x+1}) \cdot l_x \cdot \alpha$$
- (D)
$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (b'_{x+1} - b_{x+1}) \cdot (l'_{x+1} - l_{x+1}) \cdot (-V_{x+1} + \alpha) - (b'_{x+1} - b_{x+1}) \cdot l_x \cdot \alpha$$
- (E)
$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (b'_{x+1} \cdot l'_{x+1} - b_{x+1} \cdot l_{x+1}) \cdot (-V_{x+1} + \alpha) - (b'_{x+1} - b_{x+1}) \cdot l_x \cdot \{\alpha - (1+i) \cdot P\}$$

問題 15. ある年金制度は加入年齢方式を採用しており、定常状態で推移していたが、ある年度の期初に予定利率を i （ただし、 $i > 2.5\%$ ）から 2.5% に引き下げることとした。予定利率を引き下げることによって、一年間に支払う標準保険料は予定利率見直し前の責任準備金の 2% 相当額増加し、予定利率引き下げによる責任準備金の増加分の 50% を特別保険料として期末に支払うこととした。ところが、この年度の運用利回りが 13.0% となったため、期末において責任準備金と積立金が一致することとなった。引き下げ前の予定利率に最も近いものは次のいずれか。なお、保険料の拠出および給付支払いは年一回期末に行われるものとする。（3 点）

- (A) 3.2% (B) 3.8% (C) 4.2% (D) 4.5% (E) 5.0%

問題 16. 以下の空欄に当てはまる式や数字を解答用紙の所定欄に記入せよ。(9点)

(y) に支給される年金で、以下のすべての条件を満たす場合の終身年金現価率を表わす式を考える。

- [1] 年金年額 1、年 6 回期末払い
- [2] (y) が死亡した場合は、最後の年金支払い後、死亡した日の属する月までの年金を死亡時に支払う
- [3] ただし、(x) が生存している場合は支給を停止する

まず、[1] の条件を満たす終身年金現価率は、以下のとおり表される。

$$a_y^{(6)} = \sum_{t=0}^{\infty} \boxed{\text{①}} \cdot v^{\boxed{\text{②}}} \cdot \boxed{\text{②}} p_y$$

次に、[2] の条件を満たす給付の現価率(記号 ${}^{[12]}a_y$ で表す)を考える。給付内容は、

$$\text{最後の年金給付が行われた} \begin{cases} \text{翌月に死亡した場合の給付} \cdots \boxed{\text{①}} \times \boxed{\text{③}} \\ \text{翌々月に死亡した場合の給付} \cdots \boxed{\text{①}} \times \boxed{\text{④}} \end{cases}$$

であるから、 a を実数としたとき、 a を超えない最大の整数を表す記号 $[a]$ を用いて以下の通り表すことができる。

$${}^{[12]}a_y = \sum_{t=0}^{\infty} \boxed{\text{①}} \int_0^1 \boxed{\text{⑤}} \cdot v^{\boxed{\text{⑥}}} \cdot \boxed{\text{⑥}} p_y \cdot \mu^{\boxed{\text{⑦}}} ds$$

さらに、 $a_y^{(6)}$ で、[3] の条件を考慮した場合の現価率 $a_{x|y}^{(6)}$ 、および、 ${}^{[12]}a_y$ で、[3] の条件を

考慮した場合の現価率(記号 ${}^{[12]}a_{x|y}$ で表す)はそれぞれ以下の通り表される。

$$a_{x|y}^{(6)} = \sum_{t=0}^{\infty} \boxed{\text{①}} v^{\boxed{\text{②}}} \cdot (\boxed{\text{②}} p_y - \boxed{\text{⑧}})$$

$${}^{[12]}a_{x|y} = \sum_{t=0}^{\infty} \boxed{\text{①}} \int_0^1 \boxed{\text{⑤}} \cdot v^{\boxed{\text{⑥}}} \cdot (\boxed{\text{⑥}} p_y - \boxed{\text{⑨}}) \cdot \mu^{\boxed{\text{⑦}}} ds$$

求める現価率は、 $a_{x|y}^{(6)} + {}^{[12]}a_{x|y}$ で与えられる。

問題 17. A 社は加入年齢方式で年金制度の運営を行い、5 年毎の財政再計算で保険料の見直しを行っている。2011 年 4 月 1 日の財政再計算において、A 社は予定利率の見直しを検討することとした。2011 年 4 月 1 日の予定利率 2.0%および 2.5%の諸数値が以下のとおり与えられているとき、以下の各問について、適切な数値を問題文の指示に従って解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、保険料および給付は年 1 回期初（4 月 1 日）に発生するものとし、予想標準保険料および予想給付額は、年金制度が予定通り推移した場合の見込み額とする。また、未積立債務は償却終了日までの期間で元利均等償却（定額償却）するものとする。（9 点）

（単位：百万円）

		予定利率 2.0%	予定利率 2.5%
責任準備金		1,958	1,718
予想標準保険料 (2011 年度から 2015 年度)		87	83
予想給付額	2011 年度	67	
	2012 年度	83	
	2013 年度	66	
	2014 年度	84	
	2015 年度	60	
$\ddot{a}_{10 }$		9.16	8.97
$\ddot{a}_{5 }$		4.81	4.76
積立金		1,052	
未積立債務の償却終了日		2021 年 3 月 31 日	

- (1) それぞれの予定利率における 2011 年度の特別保険料を求めよ。保険料は百万円未満を四捨五入し、百万円単位とする。なお、以下の (2) (3) においては本問で求めた端数処理後の特別保険料を使用するものとする。
- (2) 予定利率 2.5%を選択し、2011 年度から 2015 年度の運用収益率が 2.0%になった場合の、2016 年 4 月 1 日の財政再計算で計算される 2016 年度以降の特別保険料を求めよ。ただし、積立金の利差損益以外に差損益は発生しないものとし、計算の前提および未積立債務の償却終了時期の変更は無いものとする。保険料は百万円未満を四捨五入し、百万円単位とする。
- (3) A 社は 2011 年 4 月 1 日の財政再計算では予定利率 2.0%を採用することとした。2011 年度から 2015 年度の運用収益率は予定利率どおりの 2.0%であったが、2016 年 4 月 1 日の財政再計算では特別保険料が 34 百万円増加した。この要因を調べたところ、2014 年度末の財政決算において責任準備金の x %相当の差損が発生していることがわかった。このとき x を小数第 2 位を四捨五入して求めよ。なお、2014 年度の差損による予想標準保険料および予想給付額に変化はなく、また、2014 年度以外はすべて予定通りに推移したものとする。計算の前提および未積立債務の償却終了時期の変更は無いものとする。

問題 18. 以下の表は、ある年金制度の $(n-1)$ 年度および (n) 年度の期末の貸借対照表および (n) 年度の未積立債務（剰余金）変動分析表である。この年金制度は、 (n) 年度の期初に加入者および年金受給権者を含めて一律 40% の給付改善を行い、給付改善後の未積立債務の 25% を特別保険料としている。財政方式は加入年齢方式とし、保険料および給付の支払いは年 1 回期初払いとする。表および下記文章中の①～⑨に当てはまる数値を求め、解答用紙の所定欄に記入せよ。なお解答は、①～⑥および⑨については小数第 1 位を四捨五入して整数とし、⑦⑧については小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位とする。（9 点）

($n-1$) 年度末貸借対照表

積立金	62,700	責任準備金	54,500
		剰余金	8,200
	62,700		62,700

(n) 年度末貸借対照表

積立金	66,560	責任準備金	76,355
未積立債務	9,795		
	76,355		76,355

(n) 年度の未積立債務（剰余金）変動分析表	
△表示は未積立債務の減少（剰余金の増加）を意味する。	
前期末剰余金にかかる予定利息	①
制度変更による未積立債務増加額	②
制度変更による未積立債務増加額にかかる予定利息	③
特別保険料	④
特別保険料にかかる予定利息	⑤
責任準備金から発生した後発債務	300
利差損益	△960
未積立債務増加額（剰余金減少額）合計	⑥

この年金制度の予定利率は %、第 n 年度の運用利回りは % である。

制度変更を行わなかった場合、第 n 年度の給付支払額が 5000 となる予定であったとすると、

第 n 年度標準保険料は である。

問題 19. 以下の内容の年金制度を考える。(15点)

【制度内容】

○ 一時金給付

支給要件：加入年数 20 年未満の生存脱退・定年に到達、加入年数によらない死亡脱退

支給時期：脱退年度の年度末に支給

一時金額：10 万円×加入年数

○ 年金給付

支給要件：加入年数 20 年以上の生存脱退・定年に到達

支給時期：60 歳到達の翌期より年 1 回期初払い。支給期間は年齢に応じて次のとおり

脱退年度の年度末において 57 歳未満……60 歳支給開始 15 年確定年金

脱退年度の年度末において 57 歳以上……60 歳支給開始 15 年保証終身年金

年金額：10 万円×加入年数× $(1+2.0\%)^{60-x} \div \ddot{a}_{\overline{15}|}(3.0\%)$

x ：脱退年度の年度末における年齢

$\ddot{a}_{\overline{t}|}(k)$ ：利率 k の期初払い t 年確定年金現価率

支給開始前に死亡した場合は、死亡の翌期初より遺族に 15 年確定年金を支給

$$\text{年金額} = 10 \text{ 万円} \times \text{加入年数} \times (1+2.0\%)^{y-x} \div \ddot{a}_{\overline{15}|}(3.0\%)$$

$$x$$
：脱退年度の年度末における年齢

$$y$$
：死亡年度の年度末における年齢

※ 支給要件の判定および年金額・一時金額の計算において加入年数の 1 年未満の端数は切り上げとする。

このような制度における、脱退率と 1 人当たりの期初払標準保険料の関係について以下の問いに答えよ。計算の前提は以下の通りである。

- ・財政方式：加入年齢方式
- ・特定年齢：20 歳（20 歳到達直後の期初に制度に加入）
- ・定年年齢：60 歳（60 歳到達直後の年度末に制度から脱退）
- ・予定利率： $i = 2.0\%$
- ・予定脱退率：生存脱退率 $q_x^{(w)}$ 、死亡脱退率 $q_x^{(d)}$ は整数 z ($20 \leq z \leq 60$) に応じて次のとおり

$$z < 60 \text{ の場合 } q_x^{(w)} = \begin{cases} 1 & (x = z) \\ 0 & (x \neq z) \end{cases}, \quad q_x^{(d)} = 0$$

$$z = 60 \text{ の場合 } q_x^{(w)} + q_x^{(d)} = 0$$

(また、 x 歳で生存脱退後 $(x+1)$ 歳までに死亡する確率は全ての x で 0 とする)

(1) 1人当たりの年間標準保険料が z に応じて10万円× P_z で与えられるとき、 P_z を式で表せ。

なお、 P_z は、 z 、 $v=1/(1+i)$ 、 $\ddot{a}_{\overline{z}|}(2.0\%)$ 、 $\ddot{a}_{\overline{z}|}(3.0\%)$ 、および下記の基数表の記号を用いて表すこととする。

(2) (1)において、 $z=20, 39, 56$ とした場合の P_z を求めよ。さらに、この3つの P_z のうち最大値を与える z が、全ての z ($20 \leq z \leq 60$)の中での最大値を与える z であることを示せ。なお、計算にあたって、下記の確定年金現価率表および基数表の数値を用い、小数第3位を四捨五入して小数第2位とすること。

[確定年金現価率]

$$\ddot{a}_{\overline{15}|}(3.0\%) = 12.29607$$

t	$\ddot{a}_{\overline{t} }(2.0\%)$	t	$\ddot{a}_{\overline{t} }(2.0\%)$	t	$\ddot{a}_{\overline{t} }(2.0\%)$
1	1.00000	19	15.99203	36	25.99862
2	1.98039	20	16.67846	37	26.48884
15	13.10625	21	17.35143	38	26.96945

[予定利率 i による基数表]

x	l_x	d_x	D_x	N_x	\overline{C}_x	\overline{M}_x
55	100,000.00	0.00	45,289.04	1,141,751.68	0.00	23,129.66
56	100,000.00	0.00	44,401.02	1,096,462.64	0.00	23,129.66
57	100,000.00	0.00	43,530.41	1,052,061.62	0.00	23,129.66
58	100,000.00	0.00	42,676.88	1,008,531.21	0.00	23,129.66
59	100,000.00	0.00	41,840.07	965,854.33	0.00	23,129.66
60	100,000.00	100.00	41,019.68	924,014.26	40.62	23,129.66
61	99,900.00	199.80	40,175.16	882,994.58	79.56	23,089.04
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
74	89,986.44	1,349.80	27,974.80	432,441.75	415.49	19,689.56
75	88,636.64	1,418.19	27,014.88	404,466.95	427.98	19,274.07
76	87,218.45	1,482.71	26,061.41	377,452.07	438.68	18,846.09

問題 20. ある年金制度は、被保険者の人数と給与の年齢別構成が定常状態に達しているものの、給与総額は毎年一定率 $(1+j)$ で増加している。保険料は給与に一定率を乗じた額、給付は脱退時の給与に比例した額とし、さらに支給開始後の年金額については、前年度の年金額の $(1+j)$ 倍となる。また、予定利率を $i (> j)$ 、財政方式は開放型総合保険料方式とし、保険料を計算する際は給与総額および年金額が今後も同様に増加することを見込むものとする。なお、保険料および給付金は年 1 回期初払とする。(13点)

- (1) ある年度における、期初の積立金を $F (> 0)$ 、年間給付総額を B としたとき、この年度の保険料総額を求めよ。
- (2) 前提条件は(1)と同一とし、また「ある年度」を第 1 年度とする。第 t 年度における給付金、期初の積立金、および保険料総額を F および B で表せ。なお、第 t 年度まで積立金の運用利回りは予定利率通りに推移したものとする。
- (3) 第 t 年度において、予定利率の引き下げを行う。 i を j に近づけた場合、保険料が賦課方式の保険料に近づくことを示せ。また、 $i = j$ の場合、極限值として求められた保険料を用いたとしても収支相等の原則が成立しないことを示せ。なお、収支相等の原則が成立するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{t+n}}{(1+i)^n} = 0$$

が成立するものと定義する。ここに、 F_{t+n} は、年金制度が予定どおり推移したものとして、 $(t+n)$ 年度の期初に見込まれる積立金とする。

以上

科目	年金数理	受験番号	社団法人 日本年金数理人会
----	------	------	---------------

問題 1	問題 2	問題 3	問題 4	問題 5
D	B	C	A	B
問題 6	問題 7	問題 8	問題 9	問題 10
C	C	E	A	B
問題 11	問題 12	問題 13	問題 14	問題 15
B	C	D	C	E

問題 16	①	②	③	④	⑤
	$\frac{1}{6}$	$\frac{t+1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{[2 \cdot s]+1}{2}$
	⑥	⑦	⑧	⑨	
	$\frac{t+s}{6}$	$y + \frac{t+s}{6}$	$\frac{t+1}{6} P_{xy}$	$\frac{t+s}{6} P_{xy}$	

問題 17	(1)		(2)	(3)
	予定利率 2.0%	予定利率 2.5%		
	99	74	82	7.4%

問題 18	①	②	③	④	⑤
	△205	21,800	545	△3,400	△85
	⑥	⑦	⑧	⑨	
	17,995	2.5	4.0	4,900	

科目	年金数理	受験番号	社団法人 日本年金数理人会
----	------	------	---------------

問題 19 ←問題番号を記入すること。

(1) z で場合分けを行う。

・ $20 \leq z < 39$ のとき (脱退者は全員一時金)

$$P_z = \frac{C_z \cdot (z-19)}{\sum_{y=20}^z D_y} = \frac{v^{z+1} \cdot (z-19)}{\sum_{y=20}^z v^y} = \frac{v^{z-19} \cdot (z-19)}{\sum_{y=20}^z v^{y-20}} = \frac{v^{z-19} \cdot (z-19)}{\ddot{a}_{z-19}|(2.0\%)}$$

・ $39 \leq z < 56$ のとき (脱退者は 60 歳支給開始 15 年確定年金)

$$P_z = \frac{C_z \cdot \frac{z-19}{\ddot{a}_{15}|(3.0\%)} \cdot 1.02^{60-(z+1)} \cdot v^{60-(z+1)} \cdot \ddot{a}_{15}|(2.0\%)}{\sum_{y=20}^z D_y} = \frac{v^{z-19} \cdot (z-19) \cdot \ddot{a}_{15}|(2.0\%)}{\ddot{a}_{z-19}| \cdot \ddot{a}_{15}|(3.0\%)}$$

※ $z = 56$ のときは脱退時の年度末における年齢が 57 歳となるため、終身年金となる

※ 60 歳未満の死亡率が 0 であるため、支給開始前の死亡を考慮する必要はない。

・ $56 \leq z < 60$ のとき (脱退者は 60 歳支給開始 15 年保証付終身年金)

$$P_z = \frac{C_z \cdot \frac{z-19}{\ddot{a}_{15}|(3.0\%)} \cdot 1.02^{60-(z+1)} \cdot \left\{ v^{60-(z+1)} \cdot \ddot{a}_{15}|(2.0\%) + \frac{N_{75}}{D_{z+1}} \right\}}{\sum_{y=20}^z D_y} = \frac{v^{z-19} \cdot (z-19) \cdot \left\{ \ddot{a}_{15}|(2.0\%) + \frac{N_{75}}{D_{60}} \right\}}{\ddot{a}_{z-19}| \cdot \ddot{a}_{15}|(3.0\%)}$$

※ 55 歳以上 60 歳未満の死亡率が 0 なので、 $1.02^{60-(z+1)} \cdot \frac{N_{75}}{D_{z+1}} = \frac{N_{75}}{D_{60}}$

・ $z = 60$ のとき (定年退職者のみで、60 歳支給開始 15 年保証付終身年金)

$$P_{60} = \frac{D_{60} \cdot \frac{40}{\ddot{a}_{15}|(3.0\%)} \cdot \left\{ \ddot{a}_{15}|(2.0\%) + \frac{N_{75}}{D_{60}} \right\}}{\sum_{y=20}^{59} D_y} = \frac{v^{40} \cdot 40 \cdot \left\{ \ddot{a}_{15}|(2.0\%) + \frac{N_{75}}{D_{60}} \right\}}{\ddot{a}_{40}| \cdot \ddot{a}_{15}|(3.0\%)} = P_{59}$$

(2) z の区分にしたがって、 $z = 20, 39, 56$ を上記式に代入すると、

$P_{20} = 0.98$ 、 $P_{39} = 0.86$ 、 $P_{56} = 1.25$ が得られる。

$f_z = \frac{v^{z-19} \cdot (z-19)}{\ddot{a}_{z-19}|(2.0\%)}$ と置くと、 $P_z = f_z \times K_z$ で表される (K_z は上記区分内では z によらず一定)

$f_z = \frac{z-19}{\ddot{s}_{z-19}|(2.0\%)} = \frac{\sum_{k=1}^{z-19} 1}{\sum_{k=1}^{z-19} 1.02^k}$ と表すと、 $\frac{1}{1.02^k}$ は k の減少関数であるため、 f_z も減少関数となる。

したがって、 $[20, 39)$ $[39, 56)$ $[56, 60)$ の各範囲において、 P_z は減少関数となる。

つまり、 P_{20} 、 P_{39} 、 P_{56} が各範囲の中で最大値を取ることとなり、このうちで最大値を与える $z = 56$ がすべての年齢で P_z の最大値を与える。

科目	年金数理	受験番号	社団法人 日本年金数理人会
----	------	------	---------------

問題 20 ←問題番号を記入すること。

(1) ある年度の総給与を S とすると、給与総額および年金額の増加を考慮した場合の保険料率 P は

$$P = \frac{B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{k-1} - F}{S \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{k-1}} \text{ なので、ある年度の保険料 } PS = B - F \left(1 - \frac{1+j}{1+i}\right) = B - F \cdot \frac{i-j}{1+i}$$

(2) t 年度の給付金、期初の積立金、保険料率および年間保険料を B_t 、 F_t 、 C_t 、 P_t とすると、

$$B_1 = B \text{ より、} B_t = B \cdot (1+j)^{t-1}.$$

また、 t 年度の総給与は (1) で使用した S を用いて $S \cdot (1+j)^{t-1}$ となるので、 P_t 、 C_t 、 F_t の関係式は、

$$P_t = \frac{B \cdot (1+j)^{t-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{k-1} - F_t}{S \cdot (1+j)^{t-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{k-1}}、C_t = P_t \cdot S \cdot (1+j)^{t-1} = B \cdot (1+j)^{t-1} - F_t \cdot \frac{i-j}{1+i}$$

$$F_{t+1} = (F_t + C_t - B_t) \cdot (1+i) = F_t \cdot \left(1 - \frac{i-j}{1+i}\right) \cdot (1+i) = F_t \cdot (1+j)$$

$$\text{これより、} F_t = F \cdot (1+j)^{t-1}、C_t = B \cdot (1+j)^{t-1} - F \cdot (1+j)^{t-1} \cdot \frac{i-j}{1+i} = \left(B - F \cdot \frac{i-j}{1+i}\right) \cdot (1+j)^{t-1}$$

(3) $C_t = B \cdot (1+j)^{t-1} - F_t \cdot \frac{i-j}{1+i}$ なので、 $\lim_{i \rightarrow j} C_t = B \cdot (1+j)^{t-1}$ となり t 年度の給付と一致する。つまり保険料

は賦課方式の保険料に近づく。

同様に $t+m$ 年度の保険料を、極限值として求めると、

$$P_{t+m} = \frac{B \cdot (1+j)^{t+m-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{k-1} - F_{t+m}}{S \cdot (1+j)^{t+m-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{k-1}}、C_{t+m} = P_{t+m} \cdot S \cdot (1+j)^{t+m-1} = B \cdot (1+j)^{t+m-1} - F_{t+m} \cdot \frac{i-j}{1+i}$$

より、すべての年度で保険料と給付額が一致する。したがって、 $t+n$ 年度の積立金は

$$F_{t+n} = (F_{t+n-1} + C_{t+n-1} - B_{t+n-1}) \cdot (1+j) = F_t \cdot (1+j)^n$$

となる。

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{t+n}}{(1+i)^n} = F_t$ となり、題意によって収支相等の原則が成立しないと言える。