基礎数理 I （問題）

問題１．次の（１）から（８）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい解答を選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。(40 点)

（１）電車は、毎時０分、２０分、４５分に発車する。Ａさんが駅に到着する時刻は８時から９時の間で一様である。Ａさんの待ち時間の期待値は $\boxed{\quad ① \quad}$ 分である。
答えに最も近いものを以下の選択肢より選べ。

（ア）	10.00	（イ）	10.22	（ウ）	10.42	（エ）	10.67	（オ）	10.89
（カ）	11.12	（キ）	11.22	（ク）	11.42	（ケ）	11.67	（コ）	12.00

（２）７個の製品のうち２個の不良品が含まれていることが分かっている。製品を１個ずつ抜き取って戻さずに検査するとき、最後の不良品を見つけるまでの検査個数を表す確率変数を X とする。このとき、X の平均は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、標準偏差は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（ア）	$\dfrac{13}{3}$	（イ）	$\dfrac{14}{3}$	（ウ）	5	（エ）	$\dfrac{16}{3}$	（オ）	$\dfrac{17}{3}$
（カ）	$\dfrac{\sqrt{20}}{3}$	（キ）	$\dfrac{\sqrt{20}}{9}$	（ク）	$\dfrac{\sqrt{14}}{3}$	（ケ）	$\dfrac{\sqrt{14}}{9}$	（コ）	$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

（３）確率分布 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{ek!}\quad (k=0,1,2,\cdots)$ の積率母関数 $\phi(\theta)$ は、$\boxed{\quad ① \quad}$ である。

確率分布 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}\quad (k=0,1,2,\cdots)$ の積率母関数 $\phi(\theta)$ は、$\boxed{\quad ② \quad}$ である。

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{e^x}\quad (x\geq 0)$ の積率母関数 $\phi(\theta)$ は、$\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

（いずれも $\phi(\theta)$ が区間 $|\theta|\leq\theta_0$ （θ_0 はある正の定数）において存在するとき、この区間で成り立つものとする。）

（ア）	$e^{\frac{1}{2}\theta(1+\theta)}$	（イ）	$\dfrac{1}{2-e^{\theta}}$	（ウ）	$\exp(e^{\theta})$	（エ）	$\left(\dfrac{e^{\theta}+1}{2}\right)^n$	（オ）	$\dfrac{1}{2-\theta}$
（カ）	$e^{\theta(1+\theta)}$	（キ）	$\dfrac{1}{1-e^{\theta}}$	（ク）	$\exp(e^{\theta}-1)$	（ケ）	$(e^{\theta}+1)^n$	（コ）	$\dfrac{1}{1-\theta}$

（4） １時間毎の受信電話数を記録したところ、

5　4　6　5　10　3　6　11　4　6　（件）

であった。ポアソン母集団$Po(\lambda)$を仮定すると、

母平均λの信頼係数９９％信頼区間は$\left[\ \boxed{\quad ① \quad}\ ,\ \boxed{\quad ② \quad}\ \right]$となる。

①および②の答えに最も近いものを以下の選択肢よりそれぞれ選べ。

なお、推定は正規分布近似により行うものとし、必要であれば、標準正規分布の上側パーセント点$u(0.010) = 2.326, u(0.005) = 2.576$を用いよ。

＜①の選択肢＞

（ア） 3.7　（イ） 3.8　（ウ） 3.9　（エ） 4.0　（オ） 4.1

（カ） 4.2　（キ） 4.3　（ク） 4.4　（ケ） 4.5　（コ） 4.6

＜②の選択肢＞

（ア） 7.4　（イ） 7.5　（ウ） 7.6　（エ） 7.7　（オ） 7.8

（カ） 7.9　（キ） 8.0　（ク） 8.1　（ケ） 8.2　（コ） 8.3

（5） １０個の球が入っている袋がある。袋の中の球の構成は、次のいずれかであることがわかっている。

（ａ） 白球３個と黒球７個

（ｂ） 白球６個と黒球４個

いま、帰無仮説H_0：「袋の中の球の構成は（ａ）である」、対立仮説H_1：「袋の中の球の構成は（ｂ）である」として、この袋から２個の球を非復元抽出でとるとき、少なくとも１個が黒球であればH_0を採択し、それ以外のときはH_0を棄却する。

この検定において、

第１種の誤りのおこる確率　$P_1 = \boxed{\quad ① \quad}$

第２種の誤りのおこる確率　$P_2 = \boxed{\quad ② \quad}$

である。

（ア） $\frac{1}{45}$　（イ） $\frac{2}{45}$　（ウ） $\frac{1}{15}$　（エ） $\frac{4}{45}$　（オ） $\frac{1}{9}$

（カ） $\frac{1}{3}$　（キ） $\frac{7}{15}$　（ク） $\frac{8}{15}$　（ケ） $\frac{3}{5}$　（コ） $\frac{2}{3}$

（6）二つの母分散の等しい正規母集団 $N(\mu_1,\sigma^2), N(\mu_2,\sigma^2)$ からの標本を

$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_x}),(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_y})$ とする。$S_x{}^2=\dfrac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}(X_i-\overline{X})^2, S_y{}^2=\dfrac{1}{n_y}\sum_{j=1}^{n_y}(Y_j-\overline{Y})^2$ とすると、

統計量 $\dfrac{1}{\sigma^2}\left(n_xS_x{}^2+n_yS_y{}^2\right)$ は自由度 $\boxed{\quad①\quad}$ の $\boxed{\quad②\quad}$ 分布に従う。

統計量 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{n_xS_x{}^2+n_yS_y{}^2}{n_x+n_y-2}\cdot\left(\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}\right)}}$ は自由度 $\boxed{\quad③\quad}$ の $\boxed{\quad④\quad}$ 分布に従う。

＜①と③の選択肢＞

（ア）n_x+n_y-2　（イ）n_x+n_y-1　（ウ）n_x+n_y　（エ）(n_x-1,n_y-1)　（オ）(n_x,n_y)

（カ）$2n_x+2n_y-2$　（キ）$2n_x+2n_y-1$　（ク）$2n_x+2n_y$　（ケ）$(2n_x-1,2n_y-1)$　（コ）$(2n_x,2n_y)$

＜②と④の選択肢＞

（ア）正規　（イ）t　（ウ）ポアソン　（エ）２変量正規　（オ）一様

（カ）コーシー　（キ）指数　（ク）F　（ケ）χ^2　（コ）二項

（7）ある損害保険において、クレーム額 X (万円)の確率密度関数が $f(x)=e^{-x}$ ($x\geq 0$)と表されるとき、この保険にエクセス方式による免責金額 a (万円)を導入した場合の被保険者の平均自己負担額は、

$\boxed{\quad①\quad}$ (万円)である。

ただし、免責金額の設定によりクレームの発生頻度は影響を受けないものとする。

（ア）$1+ae^{-a}$　（イ）ae^{-a}　（ウ）1　（エ）$a(1-e^{-a})$　（オ）$1-e^{-a}$

（カ）$1+e^{-a}$　（キ）e^{-a}　（ク）$a+e^{-a}$　（ケ）$a-e^{-a}$　（コ）$e^{-a}-1$

（8）$AR(2)$ モデル $Y_t=1.0+0.5Y_{t-1}-0.4Y_{t-2}+\varepsilon_t$ （$E(\varepsilon_t)=0, V(\varepsilon_t)=0.3$）に対し、

$\{Y_t\}$ の分散 $\gamma_0=$ $\boxed{\quad①\quad}$ 、時差２の自己共分散 $\gamma_2=$ $\boxed{\quad②\quad}$ である。

答えに最も近いものを以下の選択肢よりそれぞれ選べ。

（ア）0.55　（イ）0.49　（ウ）0.41　（エ）0.28　（オ）0.23

（カ）0.18　（キ）0.15　（ク）-0.03　（ケ）-0.06　（コ）-0.09

問題２．次の（１）から（８）までの各問について、空欄にあてはまる解答のみを、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。(60 点)

（１）確率変数 X が χ_1^2（自由度１の χ^2 分布）に従うとき、$Y=\sqrt{X}$ の確率密度関数 $g(y)$ を求める。$(y>0)$

χ_1^2 の確率密度関数は

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{\quad ① \quad} & x>0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であり、$Y=\sqrt{X}$ より、

$$g(y)=\boxed{\quad ② \quad}\cdot(y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\boxed{\quad ③ \quad}$$

（２）ある駅の駅弁は売れれば単位あたり a 円の利益があるが、売れ残ると処分するので単位あたり b 円の損失になる。駅弁の需要 D の確率分布が $p(k)=P\{D=k\}$ のとき、純利益の期待値を最大にする n を求める。

n 個用意した時の駅弁の純利益の確率変数を X_n とすると

$$E(X_n)=\sum_{k=0}^{n}p(k)\left\{\boxed{\quad ① \quad}\right\}+\boxed{\quad ② \quad}$$

従って、

$$E(X_{n+1})-E(X_n)=-\sum_{k=0}^{n}p(k)\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right)+\boxed{\quad ④ \quad}$$

これより

$$\sum_{k=0}^{n}p(k)\le\frac{\boxed{\quad ④ \quad}}{\boxed{\quad ③ \quad}}$$ である間は $E(X_{n+1})\ge E(X_n)$ となるので、左の不等式を満たさなくなる

最小の整数が純利益を最大にする n である。

（3）ある契約者集団のクレーム総額Sは、クレーム件数のパラメータが$\lambda=12$で、クレーム額が$(0,1)$の一様分布の複合ポアソン分布に従うことが判明している。このとき、クレーム総額が5以下である確率を求めたい（①～③はλを用いて解答し、④は$\lambda=12$を代入して解答すること。）。

まず、Sの平均および分散を求める。クレーム総額Sは複合ポアソン分布に従うことから、$(0,1)$の一様分布に従う確率変数をXとすると、Sの積率母関数$M_S(t)$は、Xの積率母関数$M_X(t)$を用いて

$M_S(t)=$ $\boxed{\quad ① \quad}$ と表される。

$E(S)=M_S'(0)$、$E(S^2)=M_S''(0)$であることを用いると

$E(S)=$ $\boxed{\quad ② \quad}$ 、$V(S)=$ $\boxed{\quad ③ \quad}$ であることが計算できる。

ここで、正規近似を用いると、$P(S\le 5)=P\left(\dfrac{S-\boxed{\quad ② \quad}}{\sqrt{\boxed{\quad ③ \quad}}}\le\dfrac{5-\boxed{\quad ② \quad}}{\sqrt{\boxed{\quad ③ \quad}}}\right)$であるから

$P(S\le 5)\approx\Phi($ $\boxed{\quad ④ \quad}$ $)$が求められる（Φは標準正規分布の分布関数）。

（4）$X_1,X_2,\cdots,X_n$を一様母集団$U(0,\theta)$からの標本とするとき、

$$T=\alpha_n\times\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

がθの不偏推定量となるα_nを求める。

$U(0,\theta)$の分布関数は、$F(x)=$ $\boxed{\quad ① \quad}$ $(0\le x\le\theta)$であり、

$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$の分布関数を$G(y)$とすると、

$$\begin{aligned}G(y)&=P(Y\le y)\\&=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y)\\&=P(X_1\le y)\cdot P(X_2\le y)\cdots P(X_n\le y)\\&=\boxed{\quad ② \quad}\end{aligned}$$

より

$g(y)=G'(y)=$ $\boxed{\quad ③ \quad}$

となる。

ここで

$E(T)=$ $\boxed{\quad ④ \quad}$

であり、Tがθの不偏推定量となる必要があることから、

$\alpha_n=$ $\boxed{\quad ⑤ \quad}$

（5）A町、B町、C町である法案に関する賛否を調べたところ、以下の結果が得られた。

	調査した人数(人)	法案に賛成であった人数(人)
A町	100	75
B町	80	48
C町	60	27

町によってこの法案に対する支持率に差があるといえるか有意水準５%で検定する。

A町、B町、C町の母支持率を p_A, p_B, p_C とする。

まず、帰無仮説 $H_0 : p_A = p_B$ を検定する。A町、B町の百分率の差を表す統計量を U_{AB} とすると、

$U_{AB} =$ $\boxed{①}$ であり、A町とB町とでは支持率に差が $\boxed{②}$ 。

同様に、B町、C町の百分率の差を表す統計量を U_{BC} 、C町、A町の百分率の差を表す統計量を U_{CA} とすると、

$U_{BC} =$ $\boxed{③}$ であり、B町とC町とでは支持率に差が $\boxed{④}$ 。

$U_{CA} =$ $\boxed{⑤}$ であり、C町とA町とでは支持率に差が $\boxed{⑥}$ 。

①、③、⑤は小数第３位を四捨五入し、②、④、⑥は以下の選択肢から選択すること。

（ア）ある　　　（イ）あるとはいえない

なお、必要であれば、標準正規分布の上側パーセント点 $u(0.05) = 1.645, u(0.025) = 1.960$ を用いよ。

（6）標本調査においてある母数を推定する時、一般にこの推定量は近似的に正規分布に従う。この時、この分布の平均 μ と標準偏差 σ の比、σ/μ を変動係数と呼んで推定量の精度を示す１つの尺度とする。世帯数 $N = 1{,}000$ の町で n 世帯の世帯人数を調べて総人口を推定するのに、その変動係数を５%以下にしたいという。この時、抽出する標本の大きさ n を求める。ただし、母集団の変動係数は１以下であることがわかっている。

世帯人口の母平均を μ 、母分散を σ^2 と置くと、$\sigma/\mu \leq 1$ である。総人口の推定量を Z_R とすると、

$E(Z_R) =$ $\boxed{①}$ 、$V(Z_R) = N^2 \cdot$ $\boxed{②}$

従って、Z_R の変動係数 $= \dfrac{\sqrt{V(Z_R)}}{E(Z_R)} = \dfrac{\sigma}{\mu} \cdot$ $\boxed{③}$

$\sigma/\mu \leq 1$ より Z_R の変動係数を５%以下にするためには $\boxed{③}$ ≤ 0.05

これを解いて $n \geq$ $\boxed{④}$ （小数第１位切り上げ）

なお、①～③は N を用いてよい。

（7）クレーム件数過程 $\{N_t\}$ が次の条件を満たすとする。

①$0 \le s < t \le u < v \quad \Rightarrow \quad N_t - N_s$ と $N_v - N_u$ は独立

②$P(N_t = 0) = e^{-\lambda\sqrt{t}} \quad (0 \le t)$ が成り立つ。

③同一時刻に２件以上のクレームが発生することはない。

この時、オペレーショナル・タイム $\tau(t) =$ $\boxed{\quad ① \quad}$ $(t \ge 0)$

また、強度関数 $\lambda(t) =$ $\boxed{\quad ② \quad}$ $(t \ge 0)$

強度関数 $\lambda(t)$ は時刻 t におけるクレーム瞬間発生確率を意味するので、クレーム瞬間発生確率は時刻 t の増加とともに減少していくことがわかる。

n 件目のクレームが発生する時刻を表す確率変数を T_n とするとき、T_n の平均を求める。

$N'_s = N_{\tau^{-1}(s)}$ $(s \ge 0)$ として定義される確率過程 $\{N'_s\}$ は、パラメータ $\boxed{\quad ③ \quad}$ の $\boxed{\quad ④ \quad}$ 過程に従い、$P(N'_s = n) =$ $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ が成り立つ。従って、

$S_n = \tau(T_n)$ と置くと、S_n は $\Gamma(n,$ $\boxed{\quad ③ \quad}$$)$ に従うので、

$E[T_n] = E[\tau^{-1}(S_n)] = \int_0^\infty \tau^{-1}(s)$ $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ $ds =$ $\boxed{\quad ⑦ \quad}$

（8）$[0, t]$で発生するクレームはポアソン過程（パラメータ λ）に従うとする。１回目のクレームが発生するまでの時間を W とする。このとき、W は期待値 $\boxed{\quad ① \quad}$ の $\boxed{\quad ② \quad}$ 分布に従う。

平成 24 年 10 月 2 日

科目	基礎数理Ｉ	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１

（１）	（２）		（３）			（４）		（５）	
①	①	②	①	②	③	①	②	①	②
（ウ）	（エ）	（カ）	（ク）	（イ）	（コ）	（エ）	（キ）	（ウ）	（コ）

（６）				（７）	（８）	
①	②	③	④	①	①	②
（ア）	（ケ）	（ア）	（イ）	（オ）	（ウ）	（コ）

問題２

（１）	① $\frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	② $\sqrt{\frac{2}{\pi}}y$	③ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}$	
（２）	① $(k-n)(a+b)$	② na	③ $a+b$	④ a
（３）	① $\exp\{\lambda(M_x(t)-1)\}$	② $\frac{1}{2}\lambda$	③ $\frac{1}{3}\lambda$	④ -0.5
（４）	① $\frac{x}{\theta}$	② $\{F(y)\}^n$	③ $\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}$	
	④ $\alpha_n\frac{n}{n+1}\theta$	⑤ $\frac{n+1}{n}$		
（５）	①2.15	②（ア）	③1.78	
	④（イ）	⑤3.87	⑥（ア）	

科目	基礎数理Ⅰ	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題２

<table>
<tr><td rowspan="2">（６）</td><td colspan="2">① μN</td><td colspan="2">② $\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">③ $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$</td><td colspan="2">④ 286</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（７）</td><td>① $\lambda\sqrt{t}$</td><td>② $\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}$</td><td>③ 1</td><td>④ ポアソン</td></tr>
<tr><td>⑤ $\frac{s^n}{n!}e^{-s}$</td><td>⑥ $\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s}$</td><td colspan="2">⑦ $\frac{n(n+1)}{\lambda^2}$</td></tr>
<tr><td>（８）</td><td colspan="2">① $\frac{1}{\lambda}$</td><td colspan="2">② 指数</td></tr>
</table>