年金数理（問題）

本問題においては、以下のとおりとする。
1．「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。
2．「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。
3．「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。

問題１から15までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題16から20までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題１．ある集団を、年齢幅が同じになるように若い世代と高齢の世代の 2 つに区分し、年齢が低い順に第 1 世代、第 2 世代とする。この集団について、1 期間を各世代の年齢幅と同一の期間（第 1 世代の年齢の集団が全員第 2 世代の集団となるまでの期間）とする。ある期間の期初の第 1 世代の人数は前期間の期初の総人数の α 倍、第 2 世代の人数は前期間の期初の第 1 世代の人数の p 倍となるとき、期間の経過に従って、第 1 世代と第 2 世代の期初の人数比率は当初の人数比率に関係なく、ある一定の比率に収束する。「第 1 世代の人数：第 2 世代の人数」の収束値として正しいものは次のいずれか。　（３点）

(A) $1 : p$　　(B) $\alpha + \dfrac{p}{2} : p$　　(C) $\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4p\alpha}}{2} : p$

(D) $\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + p\alpha}}{2} : p$　　(E) $\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4p\alpha}}{2} : p$

問題２．脱退残存表の生存脱退率および死亡脱退率を以下のように与えるとき、$\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{l_{60}^{(T)} - l_{60+t}^{(T)}}{t \cdot l_{60}^{(T)}}\right)$ に最も近いものは次のいずれか。なお、${}_t q_x^{(y)}$ は、現在 x 歳の加入者が t 年経過後までに脱退事由 y で脱退する確率である。　（３点）

$$ {}_t q_{40}^{(w)} = \frac{t}{60}、{}_t q_{40}^{(d)} = \frac{t}{240}\cdot\left(\frac{t}{40}+1\right) \quad (t<40) $$

(A) 0.046　(B) 0.077　(C) 0.125　(D) 0.542　(E) 0.583

問題３．経過年数 t において 1 年あたり $(20+t)$ が支払われる連続払 20 年有期生命年金がある。利力を $\delta_t = 1/(20+t)$、死力 $\mu_x = 5\%$（一定）とした場合の年金現価として最も近いものは次のいずれか。必要ならば $e = 2.718$ を用いよ。（３点）

(A) 216　(B) 253　(C) 284　(D) 312　(E) 400

問題４．死亡率が $_{t|}q_x = \dfrac{1}{k}$ $(0 \le t \le k-1)$ で定められているとき、年額１の期初払 k 年有期年金の年金現価として最も正しいものを選べ。なお、支給期間中に死亡した場合、年金額に残存支給年数を乗じた金額を一時金として死亡年度の期末に支払うものとする。（３点）

（A）$\dfrac{2}{d}\cdot\left(1-\dfrac{a_{\overline{k}|}}{k}\right)-1$　　（B）$\dfrac{2}{k}\cdot\left(1-\dfrac{a_{\overline{k}|}}{d}\right)-1$　　（C）$\dfrac{1}{d}\cdot\left(1-\dfrac{a_{\overline{k}|}}{k}\right)-\dfrac{1}{k}$

（D）$\dfrac{1}{d}\cdot\left(1-\dfrac{a_{\overline{k}|}}{k}\right)-1$　　（E）$\dfrac{1}{k}\cdot\left(2-\dfrac{a_{\overline{k}|}}{d}\right)-1$

問題５．A 社は、退職金の一部を原資として定年（60 歳）退職者に年金を支給する年金制度について、年金原資を見直すことで、以下のような制度変更を検討している。

（現行制度）
年金額は、年金原資を予定利率 5.5%の 10 年確定年金現価率で除した額とし、支給期間は 60 歳から期初払 10 年保証終身年金とする。

（変更案）
年金額は、年金原資を予定利率 2.0%の 20 年確定年金現価率で除した額とし、支給期間は 60 歳から期初払 20 年確定年金とする。

制度の変更前後で、60 歳退職時点の年金現価（予定利率 2.0%）が 10%減少するように設計したとき、変更後の年金原資は現行制度の何倍となるか。最も値の近いものの記号を選べ。なお、必要に応じて以下の諸数値を使用せよ。（３点）

予定利率	2.0%	5.5%
$\ddot{a}_{\overline{10}|}$	9.1622	7.9522
$\ddot{a}_{\overline{20}|}$	16.6785	12.6077
D_{60}	37,532.39	8,223.43
N_{60}	685,645.06	105,839.17
D_{70}	27,141.37	4,243.81
N_{70}	356,742.13	43,090.99
D_{80}	16,188.45	1,806.37
N_{80}	133,770.33	12,590.12

（A）1.9　　（B）2.0　　（C）2.1　　（D）2.2　　（E）2.3

問題６．　$l_{x_r} \cdot \left(e_{x_r} - a_{x_r}\right)$と等しくなるものの記号を選べ。ただし、$e_x$は$e_x = \sum_{y=x+1}^{\omega} \frac{l_y}{l_x}$とする。（３点）

(A) $d \cdot \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$　(B) $d \cdot \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$　(C) $d \cdot \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot a_x$　(D) $\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot a_x$　(E) $\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$

問題７．ある年金制度において、ある年度末に財政再計算を行ったところ未積立債務が生じたため、償却期間 15 年の元利均等償却を行うこととし、特別保険料率は 10.0%となった。

特別保険料は財政再計算の翌年度から期初に年 1 回拠出する予定であったが、なるべく早く償却を完了させる目的で、財政再計算の翌年度の特別保険料率を、上記の 10.0%ではなく 17.0%とした。その翌年度以降の特別保険料は再び 10.0%に戻すこととした場合、財政再計算の翌年度末の決算における償却期間の残余年数に最も近いのは次のいずれか。なお、この間、特別保険料の基となる給与総額に変動はなく、財政再計算の翌年度に特別保険料率を 17.0%とした以外、年金制度はすべて予定どおり推移したものとする。また、償却期間がn年m月であるとは、償却の最終年度において、それまでの特別保険料率に「$m \div 12$」を乗じた率を特別保険料率として拠出し、未積立債務の償却が完了することである。なお、年金現価率は以下のとおりとし、計算の過程で予定利率を用いるときは%単位で小数第２位を四捨五入するものとする。（３点）

$\ddot{a}_{\overline{15|}} = 13.10625$,　$\ddot{a}_{\overline{14|}} = 12.34837$,　$\ddot{a}_{\overline{13|}} = 11.57534$,　$\ddot{a}_{\overline{12|}} = 10.78685$

(A)　12 年 10 月　　(B)　13 年 1 月　　(C)　13 年 5 月

(D)　13 年 9 月　　(E)　14 年 0 月

問題８．定常状態にある給与比例制度の年金制度は開放基金方式により運営されている。ある年度末において財政再計算を行ったところ、未積立債務は在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価の 4 分の 1、特別保険料率は標準保険料率の 2 分の 1 となった。

ところが、財政再計算の直後に在職中の被保険者の 20%が脱退したため、基礎率および未積立債務の償却年数などの前提を見直さずに同じ計算基準日で保険料を再度計算した。新たに計算した保険料率の合計が、財政再計算の保険料率の合計よりも上回ってしまったため、さらに給付水準の引下げを行い、財政再計算の保険料率と合計を変えないようにした。給付水準を現行の何倍とすればよいか、最も近いものは次のいずれか。なお、給付引き下げの効果は在職中の被保険者の過去の加入期間には及ぶが、年金受給権者には及ばないものとする。また、脱退前後で在職中の被保険者の人員および給与の構成比率はそのままで、人数および総給与が一律20%減少したものとし、将来新たに加入する人数についても 20%の減少を見込むこととする。なお、脱退者には、制度変更前の過去の加入期間に対応する給付現価を一時金で支払ったものとする。　（３点）

(A) $\frac{4}{5}$倍　　(B) $\frac{7}{8}$倍　　(C) $\frac{14}{15}$倍　　(D) $\frac{19}{20}$倍　　(E) $\frac{23}{24}$倍

問題９．Trowbridge モデルにおいて、標準保険料を総合保険料方式に基づく到達年齢方式で運営する場合、n 年後の責任準備金 ${}^{A}V_{n}$ （積立金と、発足時の未積立債務の未償却残高との合計）を表しているのは次のいずれか。なお、${}^{E}V$ は定常状態における加入年齢方式の責任準備金とし、${}^{U}F$ は定常状態における単位積立方式の積立金とする。また、$G^{a}=G^{f}$ とする。（３点）

(A) ${}^{E}V-{}^{U}F\cdot(1-i)^{n}$　(B) ${}^{E}V-\left({}^{E}V-{}^{U}F\right)\cdot(1-d)^{n}$　(C) ${}^{E}V-\left({}^{E}V-{}^{U}F\right)\cdot(1-i)^{n}$

(D) ${}^{U}F+\left({}^{E}V-{}^{U}F\right)\cdot\left(1-d^{n}\right)$　(E) ${}^{U}F+\left({}^{E}V-{}^{U}F\right)\cdot\left(1-i^{n}\right)$

問題10．制度から生存脱退した者、または定年脱退した者に、定年年齢 x_r 歳到達年度の翌期初から、加入期間 t に対して $A\cdot t$ の年１回期初払単純終身年金を支払う制度がある。加入年齢を x_e 歳として、加入年齢方式の１人当たり標準保険料を表しているのは次のいずれか。なお、制度からの脱退時点は期末（定年脱退は定年年齢到達年度の期末）、保険料は期初払い、加入期間は 1 年未満の端数は切り上げるものとする。また、記号は以下のとおりである。（３点）

D_x、C_x、N_x：生命表による計算基数

$D_x^{(T)}$、$C_x^{(w)}$：脱退残存表による計算基数（ただし $C_x^{(w)}=d_x^{(w)}\cdot v^{x+1}$ で、$d_x^{(w)}$ は x 歳の生存脱退者のうち、脱退年度の期末までに死亡した者を除いた人数である）

(A) $\dfrac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{D_x^{(T)}}{D_x}\cdot N_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x^{(T)}}\cdot A$　(B) $\dfrac{\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r}\frac{D_x^{(T)}}{D_x}\cdot N_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x^{(T)}}\cdot A$　(C) $\dfrac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{C_x^{(w)}}{D_x}\cdot N_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x^{(T)}}\cdot A$

(D) $\dfrac{\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r}\frac{C_x^{(w)}}{D_x}\cdot N_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x^{(T)}}\cdot A$　(E) $\dfrac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{C_x^{(w)}}{D_{x+1}}\cdot N_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x^{(T)}}\cdot A$

問題11．脱退者に、脱退事由に関わらず脱退時までの加入期間の K 倍を一時金として支払う制度がある。総脱退力および利力を μ、δ（いずれも年齢または期間に関わらない一定値）とするとき、平準積立方式の 1 人当たり保険料を表しているのは次のいずれか。なお、加入年齢を x_e、定年年齢を x_r とする。（３点）

(A) $\left(\dfrac{\delta\cdot(x_r-x_e)}{e^{(\mu+\delta)\cdot(x_r-x_e)}-1}+\dfrac{\delta}{\mu+\delta}\right)\cdot K$　(B) $\left(\dfrac{\delta\cdot(x_r-x_e)}{e^{(\mu+\delta)\cdot(x_r-x_e)}-1}+\dfrac{\mu}{\mu+\delta}\right)\cdot K$

(C) $\left(\dfrac{\delta\cdot(x_r-x_e)}{e^{(\mu+\delta)\cdot(x_r-x_e)}-1}-\dfrac{\mu}{\mu+\delta}\right)\cdot K$　(D) $\left(\dfrac{\delta\cdot(x_r-x_e)}{e^{(\mu+\delta)\cdot(x_r-x_e)}-1}-\dfrac{\delta}{\mu+\delta}\right)\cdot K$

(E) $\left(\dfrac{\mu\cdot(x_r-x_e)}{e^{(\mu+\delta)\cdot(x_r-x_e)}-1}+\dfrac{\delta}{\mu+\delta}\right)\cdot K$

問題12．予定利率を年 5.0%として有期生命年金現価率が次のように与えられている。

$\ddot{a}_{50:\overline{10}|}=6.38574$、　$\ddot{a}_{51:\overline{9}|}=5.95266$、　$\ddot{a}_{52:\overline{8}|}=5.50295$、　$\ddot{a}_{53:\overline{7}|}=5.02990$

50 歳ちょうどで制度に加入し、53 歳到達時より 5 年間、年額 3 の期初払確定年金を支払う年金制度を考える。脱退残存表の死亡脱退率が生命表の死亡率と同じで、生存脱退率がすべての年齢で 10%である場合、単位積立方式による 50 歳の保険料として最も近いものは次のいずれか。なお、計算の過程で死亡率は小数第 4 位を四捨五入するものとする（３点）

(A)2.239　(B)2.284　(C)2.324　(D)2.369　(E)2.414

問題13．２つの給与比例の年金制度（AおよびB）が合併することとなった。これらの年金制度では次の関係が成立しているとする。

（１）　Bは、総人員・総給与ともAの 20%で、勤続・年齢・給与などの構成比は等しい。
（２）　Bの給付水準はAの給付水準の一律 50%
（３）　AおよびBはいずれも加入年齢方式を採用し、計算基礎率は同じものを使用している。
（４）　未積立債務はそれぞれの積立金残高と等しく、同じ償却方法および償却期間による給与比例の特別保険料で償却している。
（５）　合併前のAの特別保険料率は標準保険料率と同じである。

合併にあたっては、合併前後の年間保険料総額が変わらないようにAとBの給付水準を合わせることとしたいが、そのためには合併前のAの給付水準の何倍とすればよいか。最も近いものの記号を選べ。なお、合併後の保険料は、合併前の基礎率を使用して計算し、未積立債務の償却方法および償却期間は変えないものとする。（３点）

(A) $\dfrac{3}{4}$倍　(B) $\dfrac{7}{8}$倍　(C) $\dfrac{9}{10}$倍　(D) $\dfrac{11}{12}$倍　(E) $\dfrac{15}{16}$倍

問題14．以下のような年金制度を考える。

【脱退一時金】　受給資格：加入期間 3 年以上で生存脱退した場合
一時金額：加入期間×A

【年金】　受給資格：加入期間 20 年以上で生存脱退した場合
年金の支給内容：脱退後即時支給開始 15 年確定年金
年金額：加入期間×B
ただしBは、Aを給付利率 5.5%の 15 年確定年金現価率で除した金額

【死亡給付】　加入期間中の死亡脱退者へは給付を行わない

【保険料】　財政方式：加入年齢方式（特定年齢 22 歳）
予定利率：2.5%
標準保険料率：2.5%（年 1 回期初払）
特別保険料率：1.5%（年 1 回期初払）

ある年度末の財政決算時における諸数値が以下の通りであったとする。

積立金　　：207,692 千円　　責任準備金：315,419 千円

給与総額　：171,013 千円

ここで、次のような制度変更を行うものとする。

給付利率：5.5%→2.5%

年金の支給開始：脱退即時→60 歳（定年年齢）

据置利率：（なし）→2.5%

生存脱退後 60 歳までに死亡した場合

：60 歳から支給される年金額を、死亡から 60 歳までの期間、年利 2.5%で割引いた額を遺族に年金として 15 年間支給

支給開始後死亡の場合：死亡前と同額の年金を残存支給期間遺族に支給

未積立債務は、標準保険料と特別保険料の合計が制度変更前と同じになるように、償却年数を設定して償却する。ただし、償却年数が 10 年を超える場合は、標準保険料と償却年数 10 年の特別保険料の合計が制度変更前と同じになるように、給付水準を一律に引き下げるものとして、一時金および年金額の計算基礎となる A を減額するものとする。制度変更後の未積立債務の償却期間と給付水準（給付水準を引き下げない場合は 100%）の組み合わせについて最も近いものは次のいずれか。なお、制度変更に当たって基礎率は変更せず、予定脱退率は 42 歳まで 0、現在の加入者は全員 22 歳以下で加入しており、また年金受給者はいないものとする。計算に必要であれば以下の数値を使用せよ。（３点）

給付利率 5.5%の 15 年確定年金現価率：10.58965

給付利率 2.5%の 15 年確定年金現価率：12.69091

特別保険料率算出のための現価率

t	$\ddot{a}_{\overline{t}\rceil}(2.5\%)$	t	$\ddot{a}_{\overline{t}\rceil}(2.5\%)$
1	1.00000	6	5.64583
2	1.97561	7	6.50813
3	2.92742	8	7.34939
4	3.85602	9	8.17014
5	4.76197	10	8.97087

(A)　償却期間 10 年、給付水準 70%

(B)　償却期間 10 年、給付水準 83%

(C)　償却期間 10 年、給付水準 88%

(D)　償却期間 10 年、給付水準 91%

(E)　償却期間 9 年、給付水準 100%

問題15. ある年金制度の現在の財政方式は開放基金方式を採用している。先般の財政再計算で以下の数値を算出した。

（数値）

将来加入が見込まれる被保険者の給付現価（S^f）	50,000 千円
在職中の被保険者の将来期間にかかる給付現価（S_{FS}^a）	150,000 千円
在職中の被保険者の過去期間にかかる給付現価（S_{PS}^a）	250,000 千円
年金受給権者の給付現価（S^p）	380,000 千円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価（G^f）	200,000 千円
在職中の被保険者の給与現価（G^a）	300,000 千円
積立金残高（F）	500,000 千円
給与合計	124,000 千円

$$\ddot{a}_{\overline{7|}} = 6.41719$$

このほど、財政方式を加入年齢方式に変更することを検討しており、これに伴い予定利率等の計算基礎、および給付の内容は変更せずに保険料を算出し直した。

保険料の拠出を年 1 回期初払い、未積立債務の予定償却期間を 7 年とした場合、「加入年齢方式における標準保険料と特別保険料の合計」÷「開放基金方式における標準保険料と特別保険料の合計」に近いのは次のいずれか。（３点）

（A） 0.84　（B） 0.87　（C） 0.90　（D） 0.93　（E） 0.96

問題16．以下の空欄にあてはまる適切な数値、算式または記号を記入せよ。　（10 点）

定常人口の集団に、最終給与比例制で、在職中の者およびすでに退職した者の過去勤務期間を完全に通算するような年金制度を設立するものとした。財政方式は加入年齢方式とし、標準保険料は給与比例、制度設立時に積立金は存在せず、未積立債務は永久償却による給与比例の特別保険料を設定して償却するものとした。なお、標準保険料の計算において将来の給与改定（ベースアップ）を織り込んではおらず、静態的昇給率のみを使用している。

制度発足後、制度発足年度（第 1 年度とする）を含む毎年度末に r の給与改定が発生し、それに合わせて年金受給権者の給付も同様に $(1+r)$ 倍の給付改善を行うこととした。給与改定および受給権者の給付改善については、第 n 年度末の財政再計算まで標準保険料および特別保険料の見直しを行わなかった。なお、保険料および給付は年 1 回期初払いとし、予定利率は i （ただし $i \neq r$ ）、とする。また、給与改定以外はすべて当初の予定どおり推移するものとした。

以下、財政再計算による特別保険料の検証を行う。

第 1 年度に支払われる標準保険料を C^N 、給付支払額を B とすると、財政再計算までの標準保険料および給付支払額の財政再計算時点の元利合計は、それぞれ

標準保険料の元利合計　：$C^N \cdot (1+i) \cdot \boxed{①}$

給付の元利合計　：$B \cdot (1+i) \cdot \boxed{①}$

となる。さらに、制度設立時点の未積立債務を V_0 、在職中の者の総給与を G_0 とすると、特別保険料率 P^{PSL} は

$$P^{PSL} = \boxed{②}$$

となるため、財政再計算までの特別保険料の元利合計は、

特別保険料の元利合計　：$V_0 \cdot \boxed{③}$

となる。これらより、財政再計算時点の積立金は $\boxed{④}$ である。

財政再計算では基礎率の見直しを行わないとすると、財政再計算時点の責任準備金は $\boxed{⑤}$ となる。

したがって、未積立債務の償却期間を再計算前と同じとすると、財政再計算後の特別保険料 ${}^*P^{PSL}$ は

$${}^*P^{PSL} = \boxed{⑥}$$

となり、${}^*P^{PSL}$ $\boxed{⑦}$ P^{PSL} である（⑦は大小関係を表せ）。

問題17．以下の空欄にあてはまる適切な算式または記号を記入せよ。　（10 点）

定常状態の集団に Trowbridge モデルの年金制度を導入するものとする。制度導入時の在職中の被保険者およびすでにその集団を定年脱退した者に対しても過去期間に対応した給付を行うものとし、財政方式は個人平準保険料方式とする。保険料および給付の支払いは年 1 回期初払いとして、次の問に答えよ。なお、⑥～⑦は計算基数 D_x を用いないで答えよ。

（1）制度導入時に x 歳 $\left(x_e \le x \le x_r - 1\right)$ である加入者の保険料 ${}^{I}P_x$ は

$${}^{I}P_x = \boxed{①}$$

である。制度導入時にすでに年金受給者である者については、年金現価相当額を全額保険料として支払うこととすると、制度導入初年度（第 1 年度）の保険料 ${}^{I}C_1$ は、

$${}^{I}C_1 = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{I}P_x + S^p$$

となる。さらに、第 t 年度 $\left(2 \le t \le x_r - x_e\right)$ の保険料 ${}^{I}C_t$ は、制度導入時の在職者とそれ以降に加入した者とを区分して、

$${}^{I}C_t = \sum_{x=x_e}^{\boxed{②}} l_x^{(T)} \cdot {}^{L}P + \sum_{x=\boxed{②}+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{I}P_{\boxed{③}}$$

となる。ただし、${}^{L}P$ は平準積立方式の一人当たり保険料である。

（2）次に、$\left(x_r - x_e\right)$ 年度末の積立金が、平準積立方式の定常状態における積立金 ${}^{L}F$ になることを以下の手順で示す。

まず、制度導入時点の年金受給者分として第 1 年度に支払った保険料の元利合計は

$$S^p \cdot (1+i)^{x_r - x_e} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots（\text{I}）$$

である。

次に制度導入時点の在職中の被保険者について、${}^{I}P_x$ と ${}^{L}P$ との差額の $\left(x_r - x_e\right)$ 年度末の元利合計を計算すると、次のようになる。

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \sum_{y=x}^{x_r-1} l_y^{(T)} \cdot \left({}^{I}P_x - {}^{L}P\right) \cdot (1+i)^{\boxed{④}}$$

$$= (1+i)^{x_r - x_e} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left({}^{I}P_x - {}^{L}P\right) \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \boxed{⑤}$$

$$= (1+i)^{x_r - x_e} \cdot \left(\boxed{⑥} \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots（\text{II}）$$

したがって、（Ⅰ）＋（Ⅱ）$= (1+i)^{x_r - x_e} \cdot \boxed{⑦}$

さらに $\left(x_r - x_e\right)$ 年度までの平準積立方式の保険料の元利合計（Ⅲ）、および受給者に支払われた給付の元利合計（Ⅳ）は、平準積立方式の年間保険料を ${}^{L}C$ 、年間給付支払額を B として、それぞれ

${}^{L}C \cdot \boxed{⑧}$ ・・・・・・・・（Ⅲ）、　　$B \cdot \boxed{⑧}$ ・・・・・・・・（Ⅳ）

となるので、

（Ⅰ）＋（Ⅱ）＋（Ⅲ）－（Ⅳ）$= {}^{L}F$

が確認できた。

問題18．あるキャッシュバランス制度、加入年齢方式の年金制度で、n年度末とn+1年度末の貸借対照表、n+1年度の損益計算書、n+1年度の不足金変動要因分析表、およびその他の前提条件が以下の通りであったとする。下記文章中の①～④には当てはまる式を、⑤～⑦は当てはまる数値(⑤は小数第 3 位を四捨五入、⑥⑦は％単位で小数第 2 位を四捨五入)を、⑧はa、bいずれかを選択して解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、不足金とは、未積立債務から特別保険料収入現価を控除した額のことをいう。（10 点）

n年度末貸借対照表

積立金	8,063	責任準備金	10,400
特別保険料収入現価	1,500	(うち過去の持分付与額にかかる分	10,250)
不足金	837		

n+1年度貸借対照表

積立金	8,426	責任準備金	10,673
特別保険料収入現価	1,339		
不足金	908		

n+1年度損益計算書

給付金	142	保険料	337
		運用収益	168
n+1年度末責任準備金	10,673	n年度末責任準備金	10,400
n年度末 特別保険料収入現価	1,500	n+1年度末 特別保険料収入現価	1,339
		不足金増加	71

n +1 年度不足金変動要因分析表

不足金期初残高	837
不足金期初残高にかかる利息相当額	α
運用利差損	β
責任準備金にかかる発生差損益 (利息付与率の予定と実績の差による差損益)	γ
特別保険料収入現価の見込み差損益	δ
不足金期末残高	908

【その他の前提条件】

- n 年度末から $n+1$ 年度末を通して、年金受給権者は存在しない。
- 保険料は年 1 回期初払い。
- 給付金は年 1 回期末払い（当年度の持分付与額および利息付与額加算後）。
- 各年度の持分付与額および利息付与額は、期末に仮想個人勘定残高に加算される。
  なお、責任準備金のうち、過去の持分付与額にかかる分とは、給付現価のうち、基準日時点の仮想個人勘定残高に基づく給付現価のことをいう。
- 給付現価を計算するための将来の利息付与率の見込み（予定利息付与率という）は予定利率よりも 0.5%低く設定されており、$n+1$年度の利息付与率の実績は予定利息付与率を 0.5%下回っていた。
- 特別保険料の基となる給与総額は以下の通り。

  n 年度末　　　9,898

  $n+1$年度末　　9,800
- 要因分析表に記載されている要因以外の差損益は$n+1$年度には発生しなかった。

上記要因分析のうち、αおよびβを予定利率iを用いて表すと、

$$\alpha = \boxed{①} \qquad \beta = \boxed{②}$$

となる。次に、γは、キャッシュバランス制度における、利息付与率の予定と実績の差による差損益であるが、それは以下の通り算出される。

上述の通り、責任準備金は基準日の仮想個人勘定残高にかかる給付現価と、基準日以降の持ち分付与額の累積にかかる責任準備金とに区分される。このうち、n年度末の仮想個人勘定残高にかかる給付現価は、一年経過後には$n+1$年度末の給付現価と$n+1$年度の給付金の一部となるが、予定通り推移した場合、その合計は予定利率iを用いて、

$$10{,}250 \times \left(\boxed{③} \right)$$

となる。実際には、$n+1$年度の利息付与率は予定とは異なったため、この金額が予定の $\boxed{④}$ 倍となったことにより、以下の通り損益γが発生する。

$$\gamma = 10{,}250 \times \left(\boxed{③} \right) \times \left(\boxed{④} - 1 \right)$$

さらに、$\delta = \boxed{⑤}$ であるため、この年金制度の予定利率は $\boxed{⑥}$ %であることが分かる。

なお、この年金制度がキャッシュバランス制度によることにより発生した、利息付与率の予定と実績の差による差損益γは、利息付与率が予定通りであったとした場合の当期不足金発生額の合計を $\boxed{⑦}$ % $\boxed{⑧\ \ a.増加\ /\ b.減少}$ させたことがわかる。

問題19．評価時点からの経過年数（n）に対して、年数別の予定利率i_nを以下のように定めるものとする。

「評価時点からn年後に支払われる 1 の現在価値が$\left(\dfrac{1}{1+i_n}\right)^n$となるような$i_n$を、

経過年数（n）の年数別の予定利率とする」

これを踏まえて、次の各問に答えよ。（12 点）

(1) 年数別の予定利率i_nに次の関係があるとき、$\ddot{a}_{\overline{4|}}$および$a_{\overline{4|}}$を、小数第 4 位を四捨五入して求めよ。

$$(1+i_{n+1})^{n+1}=(1+i_n)^n\times 1.05 \qquad (n=1、2、・・・、i_1=1.0\%)$$

(2) 時点tについて微分可能な単調増加関数λ_tによって、年数別の予定利率i_tは

$$i_t=e^{\lambda_t}-1$$

と表されるものとする。このとき、利力δ_tを求め、さらに$\delta_t>\lambda_t$となることを示せ。

問題20．定常状態に達した Trowbridge モデルの年金制度において、ある年度以降、毎年期初に年金受給権者を含めた給付水準を一律$(1+r)$倍$(r>0)$とする制度変更をn回繰り返すこととした。

この年金制度の財政方式は開放基金方式であるが、制度変更にあたって標準保険料の見直しは行わないものとする。特別保険料は、以下のように、最初に制度変更を行った年度（1 年度とする）からm年度までは毎年引き上げ、（m ＋1）年度以降はm年度の特別保険料を永久に払い続けるように設定する。ここで、Cは定常状態における年間標準保険料、θはn回の制度変更によって生じる過去勤務債務を全額償却できるように定めた係数とする。なお、保険料および給付（n年度までは給付改善後の給付）は年 1 回期初払いとする。

第t年度の特別保険料：

$$\left\{ (1+r)^t - 1 \right\} \cdot \theta \cdot C \qquad (t \leqq m)$$

$$\left\{ (1+r)^m - 1 \right\} \cdot \theta \cdot C \qquad (t > m)$$

以下の各問いに答えよ（13 点）

（1） $\theta \leqq 1$ のとき、給付改善の回数nと特別保険料見直しの回数mに次の関係があることを示せ。なお、給付改善前の制度全体の年間給付額をB、予定利率をiとする。

$$\frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^m} \leqq \frac{C}{B} \quad （r \neq i） \quad , \quad \frac{n}{m} \leqq \frac{C}{B} \quad （r = i）$$

（2） $\theta \leqq 1$かつ特別保険料見直しの最終年度mを固定した場合、給付改善の回数nを増やすためには、rを増加させればよいことを、$r > i$の場合について示せ。なお、説明には、以下の定理を用いてよい。

定理：二つの実数列$\{f_j\}$　$\{g_j\}$　（ただし、$f_i > 0$、$g_i > 0$）があり、

$$\frac{f_1}{g_1} > \frac{f_2}{g_2} > \frac{f_3}{g_3} > \cdots$$

の関係があるとき、$k < l$なる自然数k、lについて、

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} f_j}{\sum_{j=1}^{k} g_j} > \frac{\sum_{j=1}^{l} f_j}{\sum_{j=1}^{l} g_j}$$

となる。

以上

平成 24 年 10 月 1 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題１	問題２	問題３	問題４	問題５
C	A	B	A	C
問題６	問題７	問題８	問題９	問題 10
B	B	E	C	A
問題 11	問題 12	問題 13	問題 14	問題 15
B	D	D	D	C

問題16	①	②	③	④
	$\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{i-r}$	$\frac{V_0}{G_0}\cdot\frac{i}{1+i}$	$i\cdot\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{i-r}$	0
	⑤	⑥	⑦	
	$V_0\cdot(1+r)^n$	$\frac{V_0}{G_0}\cdot\frac{i}{1+i}$	$=$（等しい）	

問題17	①	②	③	④
	$\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y}$	x_e+t-2	$x-t+1$	$(x_r-x_e)-(y-x)$
	⑤	⑥	⑦	⑧
	$\frac{D_y}{D_x}$	$S^a-{}^LP\cdot G^a$	${}^LF$	$\frac{1+i}{i}\cdot\left\{(1+i)^{x_r-x_e}-1\right\}$

問題18	①	②	③	④
	$837\cdot i$	$8400\cdot i-168$	$1+i$	$\frac{0.99+i}{0.995+i}$
	⑤	⑥	⑦	⑧
	13.39	3.0	42.0	b

平成 23 年 10 月 3 日

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 19 ←問題番号を記入すること。

（1）題意より、

$$(1+i_2)^2=(1+i_1)\times 1.05=1.01\times 1.05$$

$$(1+i_3)^3=(1+i_2)^2\times 1.05=1.01\times(1.05)^2$$

$$(1+i_4)^4=(1+i_2)^3\times 1.05=1.01\times(1.05)^3$$

が得られるので、

$$\ddot{a}_{\overline{4|}}=\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{1+i_{k-1}}\right)^{k-1}=3.831$$　（ただし $i_0=0$ とする）

$$a_{\overline{4|}}=\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{1+i_k}\right)^{k}=3.686$$

となる。

（2）現在の価値が 1 である積立金の、時点 t における評価額 F_t は年数別予定利率を用いると

$$F_t=(1+i_t)^t=e^{\lambda_t\cdot t}$$

となる。

利力の定義より、

$$\delta_t=\frac{1}{F_t}\cdot\frac{dF_t}{dt}=\frac{d}{dt}(log\,F_t)=\frac{d}{dt}(\lambda_t\cdot t)=\frac{d\lambda_t}{dt}\cdot t+\lambda_t$$

λ_t は単調増加関数なので、$\dfrac{d\lambda_t}{dt}>0$ 従って、$\delta_t>\lambda_t$ である。

科目	年金数理	受験番号	社団法人　日本年金数理人会

問題 20　←問題番号を記入すること。

（1）標準保険料の見直しを行わないため、過去勤務債務は制度変更による給付現価の増加分となる。

制度変更によって、給付現価は制度変更前の$(1+r)$倍になるので、第 1 年度期初時点における将来の給付改善による過去勤務債務の現在価値は$r \neq i$のとき、

$$\sum_{k=1}^{n}\left(S^{p}+S^{a}+S^{f}\right)\cdot(1+r)^{k-1}\cdot r\cdot v^{r-1}=\frac{B\cdot r}{d}\cdot\frac{1-\{(1+r)\cdot v\}^{n}}{1-(1+r)\cdot v}\quad\cdots①$$

一方、特別保険料の収入現価は

$$\sum_{t=1}^{m}\left\{(1+r)^{t}-1\right\}\cdot\theta\cdot C\cdot v^{t-1}+\sum_{t=m+1}^{\infty}\left\{(1+r)^{m}-1\right\}\cdot\theta\cdot C\cdot v^{t-1}$$

$$=\theta\cdot C\cdot\left[(1+r)\cdot\frac{1-\{(1+r)\cdot v\}^{m}}{1-(1+r)\cdot v}-\frac{1-v^{m}}{1-v}+\frac{v^{m}\cdot\left\{(1+r)^{m}-1\right\}}{1-v}\right]$$

$$=\theta\cdot C\cdot\left[(1+r)\cdot\frac{1-\{(1+r)\cdot v\}^{m}}{1-(1+r)\cdot v}-\frac{1-v^{m}\cdot(1+r)^{m}}{1-v}\right]=\frac{\theta\cdot C}{d}\cdot\frac{1-\{(1+r)\cdot v\}^{m}}{1-(1+r)\cdot v}\cdot r\quad\cdots②$$

①と②が等しくなるので、

$$\theta=\left[B\cdot\left\{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{n}\right\}\right]\Big/\left[C\cdot\left\{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{m}\right\}\right]$$となり、$\theta\leq 1$とすると題意の不等式が得られる。

$r=i$のとき、①式は$\dfrac{B\cdot i\cdot m}{d}=B\cdot m\cdot(1+i)$となる。

一方②式は$\sum_{t=1}^{m}\left\{(1+i)^{t}-1\right\}\cdot v^{t-1}+\sum_{t=m+1}^{\infty}\left\{(1+i)^{m}-1\right\}\cdot\theta\cdot C\cdot v^{t-1}=\theta\cdot C\cdot(1+i)\cdot m$となるので、$\theta\leq 1$とすると題意の不等式が得られる。

（2）Cは開放基金方式の標準保険料であるため$C<B$、つまり（1）の条件より$n<m$。

$s>r$について、$f_{j}=\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^{j}$、$g_{j}=\left(\dfrac{1+s}{1+i}\right)^{j}$と置くと$\dfrac{f_{j}}{g_{j}}=\left(\dfrac{1+r}{1+s}\right)^{j}$は減少関数なので、

「定理」の条件を満たす。従って$n<m$のとき、以下の関係がある。

$$\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{k}}{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^{k}}<\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{k}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^{k}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^{k}}{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^{k}}<\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{k}}{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{k}}<\frac{B}{C}$$

従って、sを大きく取ることによって、（1）の関係式を満たすような$n'>n$を取ることができる。