基礎数理Ⅱ（問題）

問題１．次の（１）から（１３）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい解答を選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入しなさい。（78 点）

（１）元金 2,000 万円を借り入れ、次の返済条件で返済することとした。

【返済条件】

・返済完了日は借り入れの日から 10 年後

・年 4 回期末返済

・年実利率 1.0%

・元利均等返済

この返済者が、第 2 年度の第 4 四半期末の返済と同時に、返済額とは別に 500 万円を一時金で返済し、一時金での返済前と同じ返済条件で返済額を変更した場合、第 3 年度以降の各四半期の返済額の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）360,188 円	（イ）361,188 円	（ウ）362,188 円	（エ）363,188 円
（オ）364,188 円	（カ）365,188 円	（キ）366,188 円	（ク）367,188 円

（２）次の（ア）から（オ）のうち、正しいものをすべて選びなさい。なお、正しいものが 1 つもないときは×を記入しなさい。

（ア）$\int_m^{n+m} {}_t p_x \times \mu_{x+t}\, dt = {}_{n|m}q_x$

（イ）$\int_0^n {}_t p_x \times \mu_{x+t}\, dt = {}_n q_x$

（ウ）$\int_0^n (\mu_{x+t} + \delta)\, dt = \log \dfrac{v^n}{{}_n p_x}$

（エ）$\dfrac{d}{dx}\, {}_t p_x = {}_t p_x \times (\mu_{x+t} - \mu_x)$

（オ）$\dfrac{d}{dt}\, {}_t p_x = -\, {}_t p_x \times \mu_{x+t}$

（3）ある定常人口の社会で、出生率（総人口比）が 1.0%、死亡数が 20,000 人であり、51 歳以上の人口が総人口の 50%を占め、その 51 歳以上の人口の平均死亡率が 1.9%であるとき、次の（ア）から（オ）のうち、正しいものをすべて選びなさい。なお、正しいものが 1 つもないときは×を記入しなさい。

（ア）総人口は 200 万人である。
（イ）この社会の平均寿命は 90 歳である。
（ウ）51 歳の人口は 18,000 人である。
（エ）51 歳の平均余命は 47 年である。
（オ）51 歳未満で死亡する人の死亡時年齢の平均は 31 歳である。

（4）$x = 90$、91 において、$(x+t)$ 歳 $(0 < t < 1)$ の死力 μ_{x+t} は x 歳の死力 μ_x と同じであり、$l_{90} = 11{,}662$ 、$l_{91} = 9{,}078$ 、$l_{92} = 6{,}852$ である。このとき、${}_2m_{90}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。
必要であれば、$\log 11{,}662 = 9.3641$ 、$\log 9{,}078 = 9.1136$ 、$\log 6{,}852 = 8.8323$ を用いなさい。

（ア）0.2539　（イ）0.2559　（ウ）0.2579　（エ）0.2599
（オ）0.2619　（カ）0.2639　（キ）0.2659　（ク）0.2679

（5）ある集団が原因 A 、B によって減少していく 2 重脱退残存表を考える。ここで各脱退はそれぞれ独立に、かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。また、x 歳で原因 B によって脱退する者の数を b_x とする。いま、$q_x^A = 0.04$ $(x \geq 0)$ 、$b_x = k$ $(x \geq 0$、k は正の定数$)$ 、$q_0^B = 0.00096$ であるとき、この 2 重脱退残存表の最終年齢に最も近いのは次のうちどれか。
必要であれば、$\log_{10} 2 = 0.30103$、$\log_{10} 3 = 0.47712$ を用いなさい。

（ア）92 歳　（イ）94 歳　（ウ）96 歳　（エ）98 歳
（オ）100 歳　（カ）102 歳　（キ）104 歳　（ク）106 歳

（6）$\ddot{a}^{(4)}_{x:\overline{1}|} = 0.97127$、$l_{x+t} = l_x - t \times (l_x - l_{x+1})$ $(0 \leq t \leq 1)$ のとき、q_x の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、予定利率 $i = 2.0\%$ とする。

（ア）0.05759　（イ）0.05815　（ウ）0.05871　（エ）0.05927
（オ）0.05983　（カ）0.06039　（キ）0.06095　（ク）0.06151

（７）死力が年齢に関係なく一定で 0.03 であるとき、x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、第 t 年度 $(1 \le t \le n)$ の死亡保険金額が $(x+t)$ 歳の概算平均余命 e_{x+t} に等しい死亡保険の平準払純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、予定利率 $i = 2.0\%$ とする。
　必要であれば、$e^{0.01} = 1.01005$ を用いなさい。

（ア）0.9114　（イ）0.9214　（ウ）0.9314　（エ）0.9414
（オ）0.9514　（カ）0.9614　（キ）0.9714　（ク）0.9814

（８）$\bar{a}_{\overline{10|}} = 9.2819$ 、$\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ $(0 \le x < 100)$ のとき、$\bar{a}_{40}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、$\bar{a}_{\overline{10|}}$ および $\bar{a}_{40}$ の利力は同じで、$\delta = 0.0149$ とする。

（ア）22.1760　（イ）22.2760　（ウ）22.3760　（エ）22.4760
（オ）22.5760　（カ）22.6760　（キ）22.7760　（ク）22.8760

（９）${}_{\infty}q_{x\overset{2}{y}z} = {}_{\infty}q_{xy\overset{3}{z}}$ 、${}_{\infty}q^{1}_{xy} = a$ 、${}_{\infty}q^{1}_{xz} = b$ 、${}_{\infty}q^{1}_{xyz} = c$ のとき、${}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}z}$ を表わす式は次のうちどれか。

（ア）$a+b-c$　（イ）$a-b+c$　（ウ）$-a+b+c$　（エ）$a-b-c$
（オ）$-a+b-c$　（カ）$-a-b+c$　（キ）$1+a+b-c$　（ク）$1+a-b+c$
（ケ）$1-a+b+c$　（コ）$1+a-b-c$　（サ）$1-a+b-c$　（シ）$1-a-b+c$

（１０）$\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ $(0 \le x < 100)$ のとき、${}_{10}q_{\underset{1}{20},\underset{2}{30},\overset{3}{40}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）0.0001　（イ）0.0002　（ウ）0.0003　（エ）0.0004
（オ）0.0005　（カ）0.0006　（キ）0.0007　（ク）0.0008

（１１） $a_{x:\overline{n|}}^{a(i:\overline{m|})}$ $(m<n)$ を表わす式は次のうちどれか。

実際の試験問題に不備があったため、
それを修正の上で問題を掲載した。

（ア） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+n+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}-D_{x+m}^{ii}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{ai}}{D_x^{aa}}$

（イ） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+n+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}-D_{x+m}^{aa}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{i}}{D_x^{aa}}$

（ウ） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+n+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}-D_{x+m}^{ii}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{i}}{D_x^{aa}}$

（エ） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+m+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}-D_{x+m}^{aa}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{ai}}{D_x^{aa}}$

（オ） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+m+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}+D_{x+m}^{ii}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{ai}}{D_x^{aa}}$

（カ） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+m+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}+D_{x+m}^{aa}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{i}}{D_x^{aa}}$

（キ） $\dfrac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+m+1}^{ii}-D_x^{ii}\times a_{x:\overline{n|}}^{i}+D_{x+m}^{ii}\times a_{x+m:\overline{n-m|}}^{i}}{D_x^{aa}}$

（１２） x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の養老保険において、チルメル割合を 0.0847 として全期チルメル式責任準備金を算定したところ、初年度末における全期チルメル式責任準備金の値が 0 となった。このときチルメル割合を 0.05 とした場合の初年度末における全期チルメル式責任準備金の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、予定利率 $i=2.5\%$、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=7.786$ とする。

（ア）0.012　（イ）0.022　（ウ）0.032　（エ）0.042
（オ）0.052　（カ）0.062　（キ）0.072　（ク）0.082

（１３）x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込で、疾病入院が発生した場合に、21 日以上の入院に限り、入院日数から 20 日を引いた日数と 120 日との短い方の日数に日額 δ を乗じて得られる金額を疾病入院給付金として支払う医療保険がある。

x 歳の 1 年間あたりの 21 日以上の疾病入院の予定発生率を q_x^{sh} とし、i 日の疾病入院の予定発生率を q_x^{shi} とする。また、疾病入院の発生および疾病入院給付金の支払いは入院日数によらず 1 年間に 1 回のみ年央に発生するものとする。

このとき、この医療保険の平準払純保険料を表わす式は次のうちどれか。

（ア）
$$\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{t+\frac{1}{2}}\times{}_tp_x\times q_{x+t}^{sh}\times\left\{\frac{\sum_{i=21}^{120}\left(q_{x+t}^{shi}\times i\right)+\sum_{i\geq 121}\left(q_{x+t}^{shi}\times 140\right)}{\sum_{i\geq 21}q_{x+t}^{shi}}-20\right\}\right]\times\frac{\delta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

（イ）
$$\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{t+\frac{1}{2}}\times{}_tp_x\times q_{x+t}^{sh}\times\left\{\frac{\sum_{i=21}^{140}\left(q_{x+t}^{shi}\times i\right)+\sum_{i\geq 141}\left(q_{x+t}^{shi}\times 140\right)}{\sum_{i\geq 21}q_{x+t}^{shi}}-20\right\}\right]\times\frac{\delta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

（ウ）
$$\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{t+\frac{1}{2}}\times{}_tp_x\times q_{x+t}^{sh}\times\left\{\frac{\sum_{i=21}^{140}\left(q_{x+t}^{shi}\times i\right)+\sum_{i\geq 141}\left(q_{x+t}^{shi}\times 140\right)}{\sum_{i\geq 1}q_{x+t}^{shi}}-20\right\}\right]\times\frac{\delta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

（エ）
$$\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{t+\frac{1}{2}}\times{}_tp_x\times q_{x+t}^{sh}\times\left\{\frac{\sum_{i=21}^{120}\left(q_{x+t}^{shi}\times i\right)+\sum_{i\geq 121}\left(q_{x+t}^{shi}\times 120\right)}{\sum_{i\geq 21}q_{x+t}^{shi}}-20\right\}\right]\times\frac{\delta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

（オ）
$$\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{t+\frac{1}{2}}\times{}_tp_x\times q_{x+t}^{sh}\times\left\{\frac{\sum_{i=21}^{140}\left(q_{x+t}^{shi}\times i\right)+\sum_{i\geq 141}\left(q_{x+t}^{shi}\times 120\right)}{\sum_{i\geq 21}q_{x+t}^{shi}}-20\right\}\right]\times\frac{\delta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

（カ）
$$\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{t+\frac{1}{2}}\times{}_tp_x\times q_{x+t}^{sh}\times\left\{\frac{\sum_{i=21}^{140}\left(q_{x+t}^{shi}\times i\right)+\sum_{i\geq 141}\left(q_{x+t}^{shi}\times 120\right)}{\sum_{i\geq 1}q_{x+t}^{shi}}-20\right\}\right]\times\frac{\delta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

問題２．次の（１）から（２）までの各問について、それぞれの問題の指示に従い、空欄にあてはまる解答を指定の解答用紙の所定欄に記入しなさい。(22 点)

（１）次の空欄①から⑨に選択肢の中から最も適切なものを 1 つ選んで記入しなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払の次の給付を行う保険を考える。

【給付内容】

死亡保険金：死亡した年度の年度末純保険料式責任準備金が 1 を超えない場合は 1、1 を超える場合は年度末純保険料式責任準備金

生存保険金：満期時に $S\,(>1)$

このとき、第 r 年度が年度末純保険料式責任準備金が 1 を超えない最後の年度とすると、

$(S-1)\times\ddot{a}_{x:\overline{r|}} \le \ddot{s}_{\overline{n-r|}}$ 　が成立することを以下の手順で示す。

この保険の保険料を P 、第 t 年度末純保険料式責任準備金を ${}_tV$ で表わす。

まず、第 r 年度以前の保険期間から ${}_rV$ を求めると、 ${}_rV=\dfrac{P\times\boxed{②}-\boxed{③}}{\boxed{①}}$

したがって、 $P=\boxed{④}+{}_rV\times\boxed{⑤}$ 　…（Ⅰ）

次に、第 $(r+1)$ 年度以降の保険期間から ${}_rV$ を求めると、 ${}_rV=S\times\boxed{⑥}-P\times\boxed{⑦}$

この式に（Ⅰ）の P を代入して整理すると、

${}_rV=\dfrac{\boxed{⑥}\times S-\boxed{④}\times\boxed{⑦}}{1+\boxed{⑤}\times\boxed{⑦}}$ 　…（Ⅱ）

${}_rV\le 1$ であるから、ここに（Ⅱ）を代入して整理すれば、

$1+\boxed{⑧}\times\boxed{⑦}-\boxed{⑥}\times S\ge 0$

よって、 $\dfrac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑨}}-\boxed{⑥}\times(S-1)\ge 0$ 　となり、

これを変形すると、$(S-1)\times\ddot{a}_{x:\overline{r|}} \le \ddot{s}_{\overline{n-r|}}$ 　が得られる。

【選択肢】

（ア） D_x	（イ） D_{x+r}	（ウ） D_{x+n}	（エ） N_x	（オ） N_{x+r}
（カ） N_{x+n}	（キ） M_x	（ク） M_{x+r}	（ケ） M_{x+n}	（コ） v
（サ） v^r	（シ） v^n	（ス） v^{n-r}	（セ） v^{x+r}	（ソ） v^{x+n}
（タ） $A^{1}_{x:\overline{r\rvert}}$	（チ） $A_{x:\overset{1}{\overline{r\rvert}}}$	（ツ） $A_{x:\overline{r\rvert}}$	（テ） $A^{1}_{x:\overline{n\rvert}}$	（ト） $A_{x:\overset{1}{\overline{n\rvert}}}$
（ナ） $A_{x:\overline{n\rvert}}$	（ニ） $A^{1}_{x+r:\overline{n-r\rvert}}$	（ヌ） $A_{x+r:\overset{1}{\overline{n-r\rvert}}}$	（ネ） $A_{x+r:\overline{n-r\rvert}}$	（ノ） $\ddot{a}_{x:\overline{r\rvert}}$
（ハ） $\ddot{a}_{x:\overline{n\rvert}}$	（ヒ） $\ddot{a}_{x+r:\overline{n-r\rvert}}$	（フ） $P^{1}_{x:\overline{r\rvert}}$	（ヘ） $P_{x:\overset{1}{\overline{r\rvert}}}$	（ホ） $P_{x:\overline{r\rvert}}$
（マ） $P^{1}_{x:\overline{n\rvert}}$	（ミ） $P_{x:\overset{1}{\overline{n\rvert}}}$	（ム） $P_{x:\overline{n\rvert}}$	（メ） $P^{1}_{x+r:\overline{n-r\rvert}}$	（モ） $P_{x+r:\overset{1}{\overline{n-r\rvert}}}$
（ヤ） $P_{x+r:\overline{n-r\rvert}}$	（ユ） $\ddot{a}_{\overline{r\rvert}}$	（ヨ） $\ddot{a}_{\overline{n\rvert}}$	（ラ） $\ddot{a}_{\overline{n-r\rvert}}$	（リ） $\ddot{s}_{\overline{r\rvert}}$
（ル） $\ddot{s}_{\overline{n\rvert}}$	（レ） $\ddot{s}_{\overline{n-r\rvert}}$			

（２）次の空欄①から⑬に最も適切な１つの記号を記入しなさい。なお、同じ記号を複数回用いてもよい。

１つの記号とは、q_{x+t}、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$、$D_x^{aa}$ 等をいい、$\dfrac{l_{x+t}}{l_x}$、${}_tp_x\times\mu_{x+t}$、$\sum_{t=0}^{\infty}v^t\times{}_{t|}q_x$、$N_x-N_{x+1}$ 等は不可とする。

x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額１の養老保険において、予定事業費は保険料払込のつど純保険料の h 倍 $(h>0)$ のみとする。また、この予定事業費の新契約時における現価は、各年度の危険保険料の $2k$ 倍 $(k>0)$ と貯蓄保険料の k 倍の合計の新契約時における現価と等しい。

このとき、$\dfrac{h}{k}$ を求めることを考える。ただし、$p_{x+t}=\dfrac{1}{1+\alpha}\,(0\le t\le n-1、\alpha>0)$ とする。

第 t 年度 $(1\le t\le n)$ の危険保険料、貯蓄保険料をそれぞれ P_t^r、P_t^s とすると、前提条件より

$$h\times P_{x:\overline{n|}}\times\boxed{①}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\left\{(2k\times P_t^r+k\times P_t^s)\times\frac{\boxed{③}}{\boxed{②}}\right\}$$

$$=k\times\boxed{④}+k\times\sum_{t=1}^{n}\left(\boxed{⑤}\times\boxed{⑥}\times\frac{\boxed{⑧}}{\boxed{⑦}}\times\frac{\boxed{③}}{\boxed{②}}\right)$$

ここで、

$$（右辺第２項）=\frac{k}{\boxed{⑦}}\times\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\boxed{⑥}}{\boxed{⑨}}\times\frac{\boxed{⑩}-\boxed{⑪}}{\boxed{②}}\right)$$

$$=\frac{k\times\boxed{⑫}}{\boxed{⑦}}\times\sum_{t=1}^{n}\frac{\boxed{⑩}-\boxed{⑪}}{\boxed{②}}=\frac{k\times\boxed{⑫}\times\boxed{⑬}}{\boxed{⑦}}$$

よって、

$$h\times P_{x:\overline{n|}}\times\boxed{①}=k\times\left(\boxed{④}+\frac{\boxed{⑫}\times\boxed{⑬}}{\boxed{⑦}}\right)$$ となるので、

$$\frac{h}{k}=\frac{1}{P_{x:\overline{n|}}\times\boxed{①}}\times\left(\boxed{④}+\frac{\boxed{⑫}\times\boxed{⑬}}{\boxed{⑦}}\right)$$ が求まる。