基礎数理Ⅱ（問題）

問題１．次の（１）から（１４）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい解答を選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入しなさい。(84 点)

（１）$(Ia)_{\infty} = 650$ のとき、$\ddot{a}_{\infty}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）21　（イ）26　（ウ）31　（エ）36
（オ）41　（カ）46　（キ）51　（ク）56

（２）$\mu_x = \dfrac{k}{\omega - x}$（$k$ と ω は定数、ω は最終年齢、$k > 0$、$0 \le x < \omega$）のとき、$\mathring{e}_x$ に等しい式は次のうちどれか。

（ア）$\dfrac{\omega - x}{2^k}$　（イ）$\dfrac{\omega - x}{2^{k+1}}$　（ウ）$\dfrac{\omega - x}{k^2}$　（エ）$\dfrac{\omega - x}{(k+1)^2}$

（オ）$\dfrac{(\omega - x)^2}{k}$　（カ）$\dfrac{(\omega - x)^2}{k+1}$　（キ）$\dfrac{(\omega - x)^k}{k}$　（ク）$\dfrac{(\omega - x)^{k+1}}{k+1}$

（ケ）$\dfrac{(\omega - x)^{k+1}}{k}$　（コ）$\dfrac{(\omega - x)^k}{k+1}$　（サ）$\dfrac{\omega - x}{k}$　（シ）$\dfrac{\omega - x}{k+1}$

（３）ある定常人口の社会で、${}_nq_x = a$、${}_nm_x = b$、x 歳と $(x+n)$ 歳の間で死亡する者の平均年齢が $(x+c)$ 歳であるとき、n の値を表わす式は次のうちどれか。

（ア）$\left(c + \dfrac{1}{a}\right) \times \dfrac{b}{b-1}$　（イ）$\left(c + \dfrac{1}{a}\right) \times \dfrac{a}{b-1}$　（ウ）$\left(c + \dfrac{1}{b}\right) \times \dfrac{b}{a-1}$

（エ）$\left(c + \dfrac{1}{b}\right) \times \dfrac{a}{a-1}$　（オ）$\left(c - \dfrac{1}{a}\right) \times \dfrac{b}{b-1}$　（カ）$\left(c - \dfrac{1}{a}\right) \times \dfrac{a}{b-1}$

（キ）$\left(c - \dfrac{1}{b}\right) \times \dfrac{b}{a-1}$　（ク）$\left(c - \dfrac{1}{b}\right) \times \dfrac{a}{a-1}$

（４）ある集団が原因A、Bによって減少していく２重脱退残存表を考える。ここで各脱退はそれぞれ独立に、かつ１年を通じて一様に発生するものとする。今 $0 \le x < 100$において、$\mu_x^A = \dfrac{1}{100-x}$、$\mu_x^B = 1$、$l_0 = 100$のとき、原因$A$によって$x$歳で脱退する者の数を表す式は次のうちどれか。

（ア） e^{-x}　（イ） e^{-x-1}　（ウ） e^{-x+1}　（エ） e^{-2x}
（オ） $e^{-x}+e^{-x-1}$　（カ） $e^{-x+1}+e^{-x}$　（キ） $e^{-x}-e^{-x-1}$　（ク） $e^{-x+1}-e^{-x}$

（５） x歳加入、保険期間５年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払で、次の給付を行う保険を考える。

【給付内容】
死亡保険金：既払込純保険料
生存保険金：満期時に保険金額１

この保険の純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、予定利率$i = 2.0\%$とする。

必要であれば、$(I\ddot{a})_{x:\overline{5|}} = 11.9$、$A_{x:\overline{5|}}^{\ \ 1} = 0.596$　を用いなさい。

（ア）0.160　（イ）0.165　（ウ）0.170　（エ）0.175
（オ）0.180　（カ）0.185　（キ）0.190　（ク）0.195

（６）次の（Ⅰ）、（Ⅱ）の保険の予定利率、予定死亡率は同じで、予定利率 $i = 2.0\%$ とする。

（Ⅰ） x歳加入、保険期間終身、保険料年払n年払込で次の給付を行う。
死亡保険金：死亡した年度の年度末に１を支払う
生存保険金：第$(n+1)$年度以降の各年度始に生存していれば、そのときにkを支払う

（Ⅱ） x歳加入、保険期間n年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額１の養老保険

いま、（Ⅰ）の保険の純保険料$P_x^{(\mathrm{I})}$ と（Ⅱ）の保険の純保険料$P_{x:\overline{n|}}$ との間に $P_x^{(\mathrm{I})} - P_{x:\overline{n|}} = 0.01482$ が成り立つとき、kの値に最も近いのは次のうちどれか。

必要であれば、 $\ddot{a}_x = 30.5330$、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 16.4878$　を用いなさい。

（ア）0.025　（イ）0.028　（ウ）0.031　（エ）0.034
（オ）0.037　（カ）0.040　（キ）0.043　（ク）0.046

（７）$\sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x \times A_{x+t} = 23.0888$ のとき、A_x の値に最も近いのは次のうちどれか。
ただし、予定利率 $i=2.0\%$ とする。

（ア）0.4977　（イ）0.5027　（ウ）0.5077　（エ）0.5127
（オ）0.5177　（カ）0.5227　（キ）0.5277　（ク）0.5327

（８）次の（ア）から（オ）のうち、${}_tV_x$ に等しい式をすべて選びなさい。なお、等しい式が 1 つもないときは×を記入しなさい。

（ア）$A_{x+t} \times \left(1 - \dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$　（イ）$\dfrac{P_{x+t} - P_x}{P_{x+t} - d}$　（ウ）$(P_{x+t} - P_x) \times \ddot{a}_{x+t}$

（エ）$\dfrac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+t}}{1 + \ddot{a}_x}$　（オ）$\dfrac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x}$

（９）x 歳加入、保険期間 16 年、保険料年払全期払込、予定利率 i で次の給付を行う保険の純保険料が 0.82075 であるとする。
【給付内容】
・満期まで生存すれば、満期時に生存保険金 $\ddot{a}_{\overline{16|}}$（予定利率 i で計算したもの）を支払う
・満期までに死亡すれば、死亡した年度末に死亡保険金 1 とその年度末の純保険料式責任準備金の合計を支払う

このとき、この保険の予定利率 i の値に最も近いのは次のうちどれか。
ただし、予定死亡率は年齢に関係なく $0.001 \times (1+i)$ とする。

（ア）0.75%　（イ）1.00%　（ウ）1.25%　（エ）1.50%
（オ）1.75%　（カ）2.00%　（キ）2.25%　（ク）2.50%

（１０）次の（ア）から（オ）のうち、正しいものをすべて選びなさい。なお、正しいものが１つもないときは×を記入しなさい。ただし、x 歳の者と y 歳の者の死亡はお互いに独立に発生するものとする。

（ア）$_{t}q_{\overline{xy}} = {}_{t}q_{x} + {}_{t}q_{y} - {}_{t}q_{x} \times {}_{t}q_{y}$

（イ）$_{t|}q_{\overline{xy}} = {}_{t|}q_{x} + {}_{t|}q_{y} - {}_{t|}q_{xy}$

（ウ）$_{t|}q_{xy} = {}_{t|}q_{x} + {}_{t|}q_{y} - {}_{t|}q_{x} \times {}_{t|}q_{y}$

（エ）$_{s+t}p_{xy} = {}_{s}p_{xy} \times {}_{t}p_{x+s,\,y+s}$

（オ）$_{s+t}p_{\overline{xy}} = {}_{s}p_{\overline{xy}} \times {}_{t}p_{\overline{x+s,\,y+s}}$

（１１）30 歳の者と 35 歳の者の死亡はお互いに独立に発生し、共に死力 $\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ $\left(0 \le x < 100\right)$ に従うとき、$\mathring{e}_{\overline{30,35}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）36　（イ）39　（ウ）42　（エ）45
（オ）48　（カ）51　（キ）54　（ク）57

（１２）死亡・就業不能脱退残存表のうち、以下の数値が与えられている。

$l_{44} = 972{,}225$、$l_{44}^{aa} = 964{,}732$、$i_{44} = 626$、$i_{45} = 691$

$q_{44}^{i} = 0.016$、$q_{45}^{i} = 0.018$、$q_{44}^{aa} = 0.0028$、$q_{45}^{aa} = 0.0030$

このとき、d_{45}^{ii} の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、死亡および就業不能はそれぞれ独立かつ１年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

（ア）130　（イ）135　（ウ）140　（エ）145
（オ）150　（カ）155　（キ）160　（ク）165

（１３）40 歳加入、保険期間 20 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の養老保険に対して、満期時に生存していた場合に生存保険金（保険金額 1）を支払う保険料年払全期払込の生存に関する特約を付加した。この特約を付加した養老保険の営業保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、$l_x = 100 - x \ (0 \le x \le 100)$、予定利率 $i = 3.0\%$ とし、養老保険及び生存に関する特約の予定事業費は次のとおりとする。

	予定新契約費	予定集金費	予定維持費
養老保険	新契約時にのみ養老保険の保険金額の 3%	保険料払込のつど養老保険の営業保険料の 3%	毎年度始に養老保険の保険金額の 1%
生存に関する特約	新契約時にのみ特約の保険金額の 3%	－	毎年度始に特約の保険金額の 1%

必要であれば、$v^{20} = 0.553676$、$\ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 13.147089$ を用いなさい。

（ア）0.101　（イ）0.106　（ウ）0.111　（エ）0.116
（オ）0.121　（カ）0.126　（キ）0.131　（ク）0.136

（１４）30 歳加入、保険期間 30 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 100 万円の養老保険において、10 年経過時点で保険期間のみを 30 年から 20 年に変更した。変更後の契約は、契約当初から 20 年の保険期間であったものとし、以後の保険料も変更後のものに改める。変更時に純保険料式責任準備金の差額の払込みをせず、変更後の純保険料でその差額を調整する場合、変更後の純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。必要であれば、次の基数を用いなさい。

x	D_x	N_x	M_x
30	22,659	418,109	2,817
40	13,757	235,121	2,624
50	8,228	124,552	2,354
60	－	59,384	－

（ア）2.8 万円　（イ）3.3 万円　（ウ）3.8 万円　（エ）4.3 万円
（オ）4.8 万円　（カ）5.3 万円　（キ）5.8 万円　（ク）6.3 万円

問題２．次の（１）から（２）までの各問について、空欄にあてはまる最も適切な１つの記号を、指定の解答用紙の所定欄に記入しなさい。なお、同じ記号を複数回用いてもよい。

１つの記号とは、q_{x+t} 、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 、D_x^{aa} 等をいい、$\dfrac{l_{x+t}}{l_x}$ 、${}_t p_x \times \mu_{x+t}$ 、$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \times {}_{t|}q_x$ 、$N_x - N_{x+1}$ 等は不可とする。(16 点)

（１） x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額１の養老保険において、予定死亡率 $q_{x+s}\ (s \geq 0)$ における純保険料および t 年経過時点の純保険料式責任準備金をそれぞれ $P_{x:\overline{n}|}$、${}_tV_{x:\overline{n}|}$ とし、予定死亡率 $q'_{x+s}\ (s \geq 0)$ における純保険料および t 年経過時点の純保険料式責任準備金をそれぞれ $P'_{x:\overline{n}|}$、${}_tV'_{x:\overline{n}|}$ とする。なお、予定利率は同じ値とする。

ここで、 $s \geq 0$ において $q'_{x+s} = q_{x+s} + k$ （k は定数）である場合における、$\Delta P = P'_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|}$ を求めることを考える。

t を 0 から $n-1$ の整数とするとき、t 年経過時点における責任準備金の再帰式より、以下が求められる。

$$P'_{x:\overline{n}|} = v \times \left(q_{x+t} + k\right) \times (1 - \boxed{①}) + v \times \boxed{①} - \boxed{②}$$

この両辺に D_{x+t} を掛けて整理すると、

$$D_{x+t} \times P'_{x:\overline{n}|} = \boxed{③} + (\boxed{④} \times \boxed{①} - D_{x+t} \times \boxed{②})$$
$$+ v \times k \times D_{x+t} \times (1 - \boxed{①})$$

となる。

上式に $t = 0,1,2,\cdots,n-1$ を代入して、それらを辺々加えると、

$$(\boxed{⑤} - \boxed{⑥}) \times P'_{x:\overline{n}|} = (\boxed{⑦} - \boxed{⑧}) + \boxed{⑨}$$
$$+ v \times k \times \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ D_{x+t} \times (1 - \boxed{①}) \right\}$$

となる。

これを整理すると、

$$\Delta P = \frac{v \times k}{\boxed{⑩}} \times \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \boxed{⑪} \times (1 - \boxed{①}) \right\}$$

が求まる。

（2） x 歳の就業者が就業不能となった後、t 年後 $(t \geq 1)$ から $(t+1)$ 年後の間で死亡する確率 ${}_{t|}q_x^{ai}$ を求める。ただし、死亡および就業不能はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

${}_{t|}q_x^{ai}$ は、

（Ⅰ） x 歳の就業者が t 年後までに就業不能となり、t 年後から $(t+1)$ 年後の間で死亡する確率　と
（Ⅱ） x 歳の就業者が t 年後から $(t+1)$ 年後の間に就業不能となり、かつその間に死亡する確率
の合計で表せる。

まず、（Ⅰ）を考える。x 歳の就業者が $[s, s+1]\,(0 \leq s \leq t-1)$ の間で就業不能となり、かつ $[t, t+1]$ の間で死亡する確率は、

$$\frac{\boxed{\quad ① \quad}}{l_x^{aa}} \times \left(1 - \frac{\boxed{\quad ② \quad}}{2}\right) \times \boxed{\quad ③ \quad} \times q_{x+t}^{i}$$

となる。これを変形した後に、$s = 0, 1, 2, \cdots, t-1$ について加えたものが求める確率であるから、

$$（Ⅰ）の確率 = \frac{\boxed{\quad ④ \quad} \times q_{x+t}^{i} - \boxed{\quad ⑤ \quad} \times \boxed{\quad ⑥ \quad}}{l_x^{aa}}$$ となる。

次に（Ⅱ）は、t 年間就業のまま生存し t 年後から $(t+1)$ 年後の間に就業不能となり、かつその間に死亡する確率であるから、

$$（Ⅱ）の確率 = \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}} \times \boxed{\quad ⑦ \quad} = \frac{\boxed{\quad ⑧ \quad} - \boxed{\quad ④ \quad} \times q_{x+t}^{i}}{l_x^{aa}}$$ となる。

よって、$${}_{t|}q_x^{ai} = \frac{\boxed{\quad ⑧ \quad} - \boxed{\quad ⑤ \quad} \times \boxed{\quad ⑥ \quad}}{l_x^{aa}}$$ が求まる。