基礎数理Ⅱ（問題）

問題１．次の（１）から（１４）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい解答を選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入しなさい。(84 点)

（１）時刻t における資産が $f(t)=4\times e^{\alpha t}$ $(\alpha>0$、$0\le t\le 1)$ と表され、 $f(1)=36$、$t=0$ から$t=1$までの１年間の収入利息が１であったとする。資産は常に実利率iで利息を生むものとすれば、iの値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）4.336%　（イ）4.732%　（ウ）5.128%　（エ）5.524%
（オ）5.920%　（カ）6.316%　（キ）6.712%　（ク）7.108%

（２）$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n|}}=9.9498$、$\bar{a}_{\overline{n|}}=9.8908$、$a^{(k)}_{\overline{n-\frac{1}{k}|}}=9.8248$ 、 $i^{(k)}=9.588\%$ のとき、利力の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）9.481%　（イ）9.491%　（ウ）9.501%　（エ）9.511%
（オ）9.521%　（カ）9.531%　（キ）9.541%　（ク）9.551%

（３）次の（ア）から（オ）のうち、常に正しいものをすべて選びなさい。なお、常に正しいものが１つもないときは×を記入しなさい。

（ア）　${}_{t|}q_x={}_tp_x-p_{x+t}$

（イ）　${}_{s|t}q_x={}_tp_x\times{}_sq_{x+t}$

（ウ）　$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x={}_tp_x\times\mu_{x+t}$

（エ）　$\frac{d}{dx}\,{}_tp_x={}_tp_x\times(\mu_{x+t}-\mu_x)$

（オ）　$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x=\mu_x\times\mathring{e}_x$

（4）国家Aは、死力$\mu_x = \dfrac{1}{a-x}$　$(0 \le x < a$ 、$a > 0)$で、総人口$(30 \times l_0)$人（ただし、l_0人は出生数）の定常状態にあった。この国家Aである年から出生数が毎年8%ずつ増加し始めた。出生数が増加し始めてから12年後の9歳以上12歳未満の児童数の、定常状態にあった時代の9歳以上12歳未満の児童数に対する比率の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、死力は出生数が増加し始めてからも同じとする。

（ア）1.1678	（イ）1.1681	（ウ）1.1684	（エ）1.1687
（オ）1.1690	（カ）1.1693	（キ）1.1696	（ク）1.1699

（5）ある集団が原因A、B、Cによって減少していく3重脱退残存表を考える。ここで各脱退はそれぞれ独立に、かつ1年を通じて一様に発生するものとする。

いま、$q_x^{A*} = 0.4$ 、$q_x^{B*} = 0.3$ 、x歳で原因Aによって脱退する者の数が原因Cによって脱退する者の数の2倍であるとき、q_x^{C*} の値に最も近いのは次のうちどれか。

なお、q_x^{A*} 、q_x^{B*} 、q_x^{C*} の値が小さくないので近似式を用いると、q_x^{C*}の真の値は求まらないことに注意すること。

（ア）0.205	（イ）0.209	（ウ）0.213	（エ）0.217
（オ）0.221	（カ）0.225	（キ）0.229	（ク）0.233

（6）x歳加入、保険期間20年、保険料一時払で、次の給付を行う保険を考える。

【給付内容】

・第t年度$(1 \le t \le 20)$に死亡した場合は、第t年度末に死亡保険金$\sum_{s=1}^{t} 1.005^s$を支払う

・満期まで生存した場合は、生存保険金$\sum_{s=1}^{20} 1.005^s$を支払う

予定利率$i = 0.5\%$であるとき、この保険の純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、$A_{x:\overline{20}|}^{1} = 0.19203$、${}_{20}p_x = 0.79528$ とする。

（ア）17.6965	（イ）17.7065	（ウ）17.7165	（エ）17.7265
（オ）17.7365	（カ）17.7465	（キ）17.7565	（ク）17.7665

（７）$(IA)^{1}_{x:\overline{9|}}=0.031$、$(I\ddot{a})_{x:\overline{9|}}=38.354$、$(D\ddot{a})_{x:\overline{9|}}=41.588$、$A_{x:\overline{9|}}^{\ \ 1}=0.761$のとき、予定利率の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）1.8%　　（イ）2.0%　　（ウ）2.2%　　（エ）2.4%
（オ）2.6%　　（カ）2.8%　　（キ）3.0%　　（ク）3.2%

（８）x歳加入、保険期間終身、保険料年払終身払込で、次の給付を行う保険を考える。
【給付内容】
・死亡した場合は、死亡した年度末に死亡保険金額１を支払う
・第n年度以降に生存している場合は、毎年度末に年金額cを支払う

この保険の純保険料は、第１年度から第$(n-1)$年度まではP_1、第n年度以降はP_2であり、またP_2はx歳加入、保険料年払終身払込、保険金年度末支払、保険金額１の終身保険の純保険料P_xと同額とする。

この保険の第n年度末の純保険料式責任準備金が死亡保険金額を超えないとすると、cの最大値を表す式は次のうちどれか。

（ア）$\dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{(\ddot{a}_{x+n}-1)\times\ddot{a}_x}$　（イ）$\dfrac{\ddot{a}_x}{(\ddot{a}_x-1)\times\ddot{a}_{x+n}}$　（ウ）$\dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+n}-1}$　（エ）$\dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x-1}$

（オ）$\dfrac{1}{(\ddot{a}_{x+n}-1)\times\ddot{a}_x}$　（カ）$\dfrac{1}{(\ddot{a}_x-1)\times\ddot{a}_{x+n}}$　（キ）$\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+n}}$　（ク）$\dfrac{1}{\ddot{a}_x}$

（９）20歳の者、30歳の者及び40歳の者の死亡はお互いに独立に発生し、共に死力$\mu_x=\dfrac{1}{120-x}$　$(0\le x<120)$に従うとき、${}_{5|}q^{\ 1}_{20,\overline{30,40}}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）0.00876　　（イ）0.00896　　（ウ）0.00916　　（エ）0.00936
（オ）0.00956　　（カ）0.00976　　（キ）0.00996　　（ク）0.01016

（１０）x 歳の被保険者を (x) という記号で表すこととする。いま、3 人がそれぞれ x 歳、y 歳、z 歳加入、年金年度末支払で、次の給付を行う連生終身年金を考える。

【給付内容】

・(x)、(y)、(z) がともに生存している間は、3 人とも年金額 1 を受け取る

・1 人が死亡した場合、残りの 2 人の生存中は両者が年金額 2 を受け取る

・(x)、(y)、(z) のいずれか 1 人が生存している間は、生存している者が年金額 3 を受け取る

このとき、(x) が受け取る年金の加入時における現価を表す式は次のうちどれか。ただし、(x)、(y)、(z) は同一の生命表に従い、その死亡はそれぞれお互いに独立に発生するものとする。

（ア）$a_{xyz}+(a_{xz}+a_{xy})+3\times a_x$　　（イ）$(a_{xz}+a_{xy})+3\times a_x$

（ウ）$a_{xyz}-(a_{xz}+a_{xy})+3\times a_x$　　（エ）$-(a_{xz}+a_{xy})+3\times a_x$

（オ）$a_{xyz}+2\times(a_{xz}+a_{xy})-3\times a_x$　　（カ）$2\times(a_{xz}+a_{xy})-3\times a_x$

（キ）$a_{xyz}+2\times(a_{xz}+a_{xy})+3\times a_x$　　（ク）$2\times(a_{xz}+a_{xy})+3\times a_x$

（１１）死亡・就業不能脱退残存表のうち、以下の数値が与えられている。

$l_{50}^{aa}=95{,}092$、$d_{50}^{aa}=289$、$i_{50}=101$、$l_{50}^{ii}=914$、$d_{50}^{ii}=15$

このとき、次の（ア）から（ク）までのうち、その値が 5 番目に大きいものはどれか。

ただし、死亡および就業不能はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

（ア）q_{50}　　（イ）q_{50}^{aa}　　（ウ）q_{50}^{aa*}　　（エ）$q_{50}^{(i)}$

（オ）q_{50}^{ii}　　（カ）q_{50}^{i}　　（キ）q_{50}^{a}　　（ク）q_{50}^{ai}

（１２）就業者であるx歳の被保険者が次の給付を行う保険期間n年の保険に加入する場合を考える。

【給付内容】

・保険期間中に就業不能にならず死亡した場合、死亡した年度末に保険金額１を支払う

・保険期間中に就業不能となって死亡した場合、死亡した年度末に保険金額１を支払う

・上記以外の給付はない

保険料は年払とし、保険期間中に被保険者が就業している限り、毎年度始に払い込むものとする。

このとき、この保険の純保険料を表す式は次のうちどれか。

ただし、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

（ア）$$\frac{M_x - M_{x+n} - D_x^i \times \dfrac{M_x^{ii} - M_{x+n}^{ii}}{D_x^{ii}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（イ）$$\frac{M_x^{aa} - M_{x+n}^{aa} + D_x^i \times \dfrac{M_x^{ii} - M_{x+n}^{ii}}{D_x^{ii}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（ウ）$$\frac{M_x - M_{x+n} - D_x^{ii} \times \dfrac{M_x^{i} - M_{x+n}^{i}}{D_x^{i}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（エ）$$\frac{M_x^{aa} - M_{x+n}^{aa} + D_x^{ii} \times \dfrac{M_x^{i} - M_{x+n}^{i}}{D_x^{i}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（オ）$$\frac{M_x - M_{x+n} - (M_x^i - M_{x+n}^i) + D_x^i \times \dfrac{M_x^{ii} - M_{x+n}^{ii}}{D_x^{ii}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（カ）$$\frac{M_x^{aa} - M_{x+n}^{aa} + M_x^i - M_{x+n}^i - D_x^i \times \dfrac{M_x^{ii} - M_{x+n}^{ii}}{D_x^{ii}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（キ）$$\frac{M_x - M_{x+n} - (M_x^i - M_{x+n}^i) + D_x^{ii} \times \dfrac{M_x^{i} - M_{x+n}^{i}}{D_x^{i}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（ク）$$\frac{M_x^{aa} - M_{x+n}^{aa} + M_x^i - M_{x+n}^i - D_x^{ii} \times \dfrac{M_x^{i} - M_{x+n}^{i}}{D_x^{i}}}{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}$$

（１３）30 歳加入、保険期間 20 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の養老保険において、加入後 8 年で延長保険に変更した。

予定利率 $i = 1.5\%$、$\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = 17.235$、$\ddot{a}_{38:\overline{12|}} = 10.971$、$A_{38:\overline{12|}}^{\ \ 1} = 0.81529$ のとき、変更後の延長保険の生存保険金額の値に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、加入後経過 t 年の解約返戻金は ${}_tW = {}_tV_{30:\overline{20|}} - 0.02 \times \dfrac{10-t}{10}$（$t \leq 10$）とし、延長保険変更後の予定維持費は毎年度始に死亡保険金額の 0.001、生存保険金額の 0.001 を徴収するものとする。また変更時点での貸付金残高は 0.200 であり、延長保険の保険金額は貸付金分を控除するものとする。

（ア）0.28　　（イ）0.25　　（ウ）0.22　　（エ）0.19　　（オ）0.16
（カ）0.13　　（キ）0.10　　（ク）0.00（延長保険の保険期間が 12 年未満）

（１４）x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の養老保険において、予定死亡率 q_x、予定利率 i における純保険料を $P_{x:\overline{n|}}$ とし、予定死亡率 q'_x、予定利率 i' における純保険料を $P'_{x:\overline{n|}}$ とする。

いま、q_{x+t} と q'_{x+t} および i と i' には、t を整数として、以下の関係があるとする。

$$\begin{cases} q'_{x+t} = 1.002 \times q_{x+t} - 0.002 \ \ (0 \leq t) \text{ 、} q'_{x+t} = q_{x+t} \ \ (t < 0) \\ i' = 1.002 \times i + 0.002 \end{cases}$$

予定利率 $i = 2.5\%$ のとき、$\Delta P = P'_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）－0.00190　　（イ）－0.00195　　（ウ）－0.00200　　（エ）－0.00205
（オ）－0.00210　　（カ）－0.00215　　（キ）－0.00220　　（ク）－0.00225

問題２．次の（１）については、空欄にあてはまる最も適切な数値を指定の解答用紙の所定欄に記入し、次の（２）については、空欄にあてはまる最も適切なものを選択肢の中から１つ選んで指定の解答用紙の所定欄に記入しなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。(16 点)

（１）x 歳の被保険者を (x) という記号で表すこととする。

(20)、(30) の死亡はお互いに独立に発生し、共に死力 $\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ $(0 \leq x < 100)$ に従う。

このとき、(20)、(30) の順番で 10 年以内に共に死亡し、かつ (20) が死亡してから 4 年以内に (30) が死亡する確率を考える。

この確率は、t 年後 $(0 \leq t \leq 10)$ に (20) が死亡し、その時点で (30) が生存し、かつ

$\min(t + \boxed{\quad ① \quad}, \boxed{\quad ② \quad})$ 年後に (30) が死亡している確率の t が 0 から 10 までの合計であるから、$\boxed{\quad ③ \quad}$（小数第 5 位四捨五入）であることがわかる。

（２）就業者であるx歳の被保険者が次の給付を行う保険期間終身の保険に加入する場合を考える。

【給付内容】

・保険期間中に就業不能にならず死亡した場合、即時に保険金額１を支払う

・保険期間中に就業不能となって死亡した場合、即時に保険金額１を支払う

・上記以外の給付はない

保険料は連続払とし、保険期間中に被保険者が生存している限り、払い込むものとする。

利力は定数δ ($\delta > 0$)とし、瞬間死亡率および瞬間就業不能率は、すべて年齢に関係なく一定で、定数c ($c > 0$)を用いて次のとおり表され、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

・就業者の瞬間死亡率 $(\mu^{ad}) = c$

・就業者の瞬間就業不能率 $(\mu^{ai}) = 2c$

・就業不能者の瞬間死亡率 $(\mu^{id}) = 4c$

このとき、この保険の純保険料を求める。

まず、${}_t p_x^{aa} = \boxed{\quad ① \quad}$、${}_t p_x^{i} = \boxed{\quad ② \quad}$となる。

次に、${}_t p_x^{ai}$はx歳の就業者が$(x+s)$歳$(0 \le s \le t)$で就業不能となり、かつ$(x+t)$歳まで生存する確率のsが０からtまでの合計であるから、

$${}_t p_x^{ai} = \boxed{\quad ③ \quad} - \boxed{\quad ④ \quad}$$

となる。更に、これらより、

$${}_t p_x^{a} = \boxed{\quad ⑤ \quad} - \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

となる。

以上より、就業者であるx歳の被保険者が生存している限り年額１が連続して支払われる年金の現価を$\bar{a}$とすると、

$$\bar{a} = \frac{\boxed{\quad ⑧ \quad} + \delta}{(3 \times c + \delta) \times (\boxed{\quad ⑦ \quad} + \delta)}$$

となり、一方、この保険の一時払純保険料を$\bar{A}$とすると、

$$\bar{A} = \frac{\boxed{\quad ⑨ \quad} \times (\boxed{\quad ⑩ \quad} + \delta)}{(3 \times c + \delta) \times (\boxed{\quad ⑦ \quad} + \delta)}$$

となることから、求める純保険料を$\bar{P}$とすると、

$$\bar{P} = \frac{\boxed{\quad ⑨ \quad} \times (\boxed{\quad ⑩ \quad} + \delta)}{\boxed{\quad ⑧ \quad} + \delta}$$ となる。

【選択肢】

（ア） e^{-ct}	（イ） e^{-2ct}	（ウ） e^{-3ct}	（エ） e^{-4ct}	（オ） e^{-5ct}
（カ） $2\times e^{-ct}$	（キ） $2\times e^{-2ct}$	（ク） $2\times e^{-3ct}$	（ケ） $2\times e^{-4ct}$	（コ） $2\times e^{-5ct}$
（サ） $3\times e^{-ct}$	（シ） $3\times e^{-2ct}$	（ス） $3\times e^{-3ct}$	（セ） $3\times e^{-4ct}$	（ソ） $3\times e^{-5ct}$
（タ） $4\times e^{-ct}$	（チ） $4\times e^{-2ct}$	（ツ） $4\times e^{-3ct}$	（テ） $4\times e^{-4ct}$	（ト） $4\times e^{-5ct}$
（ナ） c	（ニ） $2\times c$	（ヌ） $3\times c$	（ネ） $4\times c$	（ノ） $5\times c$
（ハ） $6\times c$	（ヒ） $7\times c$	（フ） $8\times c$	（ヘ） $9\times c$	（ホ） $10\times c$
（マ） $11\times c$	（ミ） $12\times c$	（ム） $13\times c$	（メ） $14\times c$	（モ） $15\times c$