

年金数理（問題）

本問題においては、以下のとおりとする。

1. 「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年 1 の年金を、退職時より終身にわたり年 1 回期初に支給する年金制度をいう。
2. 「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。
3. 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
4. 特に断らない限り、予定利率 i は正値を取るものとする。

問題 1 から 15 までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題 16 から 20 までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題 1. ある集団は次の l_x で定常人口にあった。

$$l_x = l_0 \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)$$

ある時点から出生数が年々変動し、その時点からの経過年数 t における出生数は、定常人口における出生数の α^t ($\alpha > 0$)倍となった。この集団の死亡率が、定常人口における死亡率と同じである場合、 $t = \omega$ におけるこの集団の人口を表す式として適切なものは次のいずれか。(4 点)

(A) $\frac{l_0}{\log \alpha} \left(\alpha^\omega + \frac{1}{\omega \log \alpha} (\alpha^\omega - 1) \right)$

(B) $\frac{l_0}{\log \alpha} \left(\alpha^\omega - \frac{1}{\log \alpha} (\alpha^\omega - 1) \right)$

(C) $\frac{l_0}{\log \alpha} \cdot \frac{1}{\omega \log \alpha} (\alpha^\omega + 1)$

(D) $\frac{l_0}{\log \alpha} \cdot \frac{1}{\omega \log \alpha} (\alpha^\omega - 1)$

(E) $\frac{l_0}{\log \alpha} \left(\alpha^\omega - \frac{1}{\omega \log \alpha} (\alpha^\omega - 1) \right)$

問題 2. 生存脱退と死亡脱退を脱退事由とする二重脱退残存表を考える。それぞれの脱退は1年を通じて一様に発生するものとし、 $q_x^{(w)}$ を二重脱退残存表における生存脱退率、 $q_x^{(d)}$ を死亡脱退率とする。今、生存脱退と死亡脱退を単独の脱退事由とする、それぞれの脱退残存表における x 歳の生存脱退率、死亡脱退率を $q_x^{(w)*}$ 、 $q_x^{(d)*}$ とする。このとき、 $q_x^{(d)}$ を $q_x^{(w)*}$ 、 $q_x^{(d)*}$ を用いて表す算式として適切なものは次のいずれか。(4点)

- (A) $\frac{q_x^{(d)*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(w)*}\right)}{1 - \frac{1}{4} q_x^{(d)*} \cdot q_x^{(w)*}}$ (B) $\frac{q_x^{(d)*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(w)*}\right)}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(d)*} \cdot q_x^{(w)*}}$ (C) $\frac{q_x^{(d)*} \left(1 + \frac{1}{2} q_x^{(w)*}\right)}{1 - \frac{1}{4} q_x^{(d)*} \cdot q_x^{(w)*}}$
- (D) $\frac{q_x^{(w)*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(d)*}\right)}{1 - \frac{1}{4} q_x^{(d)*} \cdot q_x^{(w)*}}$ (E) $\frac{q_x^{(w)*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(d)*}\right)}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(d)*} \cdot q_x^{(w)*}}$

問題 3. 4生命 (w) 、 (x) 、 (y) 、 (z) について、4人が共に生存しているときは4人とも1/4を、1人が死亡したときは残り3人が1/3ずつを、2人が死亡したときは残り2人が1/2ずつを、1人のみ生存しているときは生存者が1を年金額として期末に受け取るものとする。このとき (w) が受け取る年金の現価は次のいずれか。(4点)

- (A) $a_w + \frac{1}{2}(a_{wx} + a_{wy} + a_{wz}) - \frac{1}{3}(a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz}) + \frac{1}{4}a_{wxyz}$
- (B) $a_w - \frac{1}{2}(a_{wx} + a_{wy} + a_{wz}) + \frac{1}{3}(a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz}) - \frac{1}{4}a_{wxyz}$
- (C) $a_w - \frac{1}{2}(a_{wx} + a_{wy} + a_{wz}) + \frac{1}{3}(a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz}) + \frac{1}{4}a_{wxyz}$
- (D) $a_w - \frac{1}{2}(a_{wx} + a_{wy} + a_{wz}) + \frac{2}{3}(a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz}) - \frac{1}{4}a_{wxyz}$
- (E) $a_w + \frac{1}{2}(a_{wx} + a_{wy} + a_{wz}) - \frac{2}{3}(a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz}) - \frac{1}{4}a_{wxyz}$

問題4. 年 m 回期末払、支給期間 n 年、年金年額 K の確定年金について、1年目の年金年額を K_1 、2年目の年金年額を K_2 、3年目以降の年金年額を K_3 に変更するものとした。

予定利率 i で計算した制度変更前の年金現価と、予定利率を年度毎に1年目 i_1 、2年目 i_2 、3年目以降 i として計算した制度変更後の年金現価が、年金の支給期間に関わらず同額となる場合、 $n \geq 2$ のときの変更後の支給期間中の年金の総額 $K_1 + K_2 + (n - 2)K_3$ を表す式として適切なものは次のいずれか。なお、この問題において、予定利率 j の年 k 回期末払 l 年確定年金現価率を $a_{\overline{l}|j}^{(k)}$ で表すこととする。(4点)

- (A) $K \left(\frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)}{a_{\overline{1}|i_1}^{(m)}(i_1)} + \frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)}{a_{\overline{1}|i_2}^{(m)}(i_2)} + (n - 2) \right)$
- (B) $K \left(\frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)}{a_{\overline{1}|i_1}^{(m)}(i_1)} + \frac{1 + i_1}{1 + i} \cdot \frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)}{a_{\overline{1}|i_2}^{(m)}(i_2)} + (n - 2) \frac{(1 + i_1)(1 + i_2)}{(1 + i)^2} \right)$
- (C) $K \left(\frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i_1)}{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)} + \frac{1 + i_1}{1 + i} \cdot \frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i_2)}{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)} + (n - 2) \frac{(1 + i_1)(1 + i_2)}{(1 + i)^2} \right)$
- (D) $K \left(\frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)}{a_{\overline{1}|i_1}^{(m)}(i_1)} + (1 + i_1) \frac{a_{\overline{1}|i}^{(m)}(i)}{a_{\overline{1}|i_2}^{(m)}(i_2)} + (n - 2)(1 + i_1)(1 + i_2) \right)$
- (E) Kn

問題5. Trowbridge モデルにおいて財政方式を、(a)退職時年金現価積立方式、(b)加入年齢方式とした場合、定常状態における期末の積立金として正しい組み合わせとなっているものは次のいずれか。なお、保険料は年1回期初払いとし、 P は加入年齢方式の標準保険料とする。(4点)

- ① $\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$ ② $\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$ ③ $\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left(P \cdot \sum_{y=x_e}^x l_y \cdot (1 + i)^{x-y} \right) + \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$
- ④ $\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} \left(P \cdot \sum_{y=x_e}^{x-1} l_y \cdot (1 + i)^{x-y-1} \right) + \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$ ⑤ $\sum_{x=x_e+1}^{x_r} \left(P \cdot \sum_{y=x_e}^{x-1} l_y \cdot (1 + i)^{x-y} \right) + \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$

- (A) (a) → ①、(b) → ③ (B) (a) → ①、(b) → ④ (C) (a) → ②、(b) → ③
- (D) (a) → ②、(b) → ④ (E) (a) → ②、(b) → ⑤

問題 6. 以下の内容の定常状態に達した Trowbridge モデルに基づく年金制度がある。

財政方式：開放基金方式

予定利率：3.0%

加入年齢(x_e)：28 歳

定年年齢(x_r)：60 歳

x 歳(在職中の被保険者または年金受給権者)の人数(l_x)：

$$l_x = l_{x_e} \times (1 + 2.0\%)^{x_e - x}$$

この年金制度の一年間の標準保険料は、予定利率 i 、加入年齢 x_e 歳とした平準保険料方式の保険料と一致した。 i の値に最も近いのは次のいずれか。なお、保険料は年 1 回期初払いとし、計算に必要であれば、以下の数値を用いるものとする。(4 点)

$$(1 + 3.0\%)^{15} = 1.55797$$

$$(1 + 2.0\%)^{15} = 1.34587$$

- (A) 2.6% (B) 2.7% (C) 2.8% (D) 2.9% (E) 3.0%

問題 7. 現在開放基金方式で運営している A 社の年金制度がある。財政再計算時において A 社と B 社が合併し、B 社の年金制度を統合することとなった。これに伴って財政方式を開放基金方式から閉鎖型総合保険料方式に変更することとした。

仮に、制度の統合および財政方式の変更を行わない場合、財政再計算によって財政再計算直後の A 社の保険料年額が 42 百万円になると見込まれた。このとき、合併直後の保険料年額として最も近いものは次のいずれか。なお、年金制度の内容および基礎率は A 社の制度および財政再計算後の基礎率を引き継ぐものとし、財政再計算による合併前後の A 社の諸数値および合併後の B 社の諸数値は以下の通りである。また、保険料は給与比例で、年 1 回期初払いとし、財政再計算の結果は直ちに適用されるものとする。開放基金方式の保険料は収支相等する保険料を求め、未積立債務が生じた場合の償却年数は 10 年とする。(4 点)

	A 社	B 社
将来加入が見込まれる被保険者の給付現価(S^f)	1,000 百万円	—
在職中の被保険者の給付現価(S^a)	2,000 百万円	700 百万円
在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価(S_{ps}^a)	1,500 百万円	400 百万円
年金受給権者の給付現価(S^p)	800 百万円	200 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価(G^f)	3,500 百万円	—
在職中の被保険者の給与現価(G^a)	1,500 百万円	500 百万円
総給与(B)	150 百万円	40 百万円
特別保険料算出のための給与現価($B \times \ddot{a}_{\overline{10} }$)	1,300 百万円	—
年金資産(F)	*,***百万円	500 百万円

- (A) 76 百万円 (B) 80 百万円 (C) 84 百万円 (D) 88 百万円 (E) 92 百万円

問題 8. ある年金制度の初期未積立債務は 10,000 であり下記の①、②の 2 つの償却方法を考えた。償却期間中において後発債務が発生しない場合、第 8 年度末において、①の償却方法による未積立債務が②のそれと等しくなるとする。このときの α について一番近いものは次のいずれか。

- ① 10 年の元利均等償却
② 前年度末の未積立債務に対する一定割合 α ($0\% < \alpha < 100\%$) を償却

保険料は年 1 回期初払とし、予定利率は 1.5%、期初払 10 年確定年金現価率は、9.36052 を使用するものとする。(4 点)

- (A) 17.9% (B) 18.2% (C) 18.5% (D) 18.8% (E) 19.1%

問題 9. 定常人口の下にある年金制度で、財政方式を開放基金方式とした場合の標準保険料率を ${}^{OAN}P$ 、財政方式を加入年齢方式とした場合の標準保険料率を EP 、財政方式を総合保険料方式に基づく到達年齢方式とした場合の制度発足時の標準保険料率を AP とする。将来加入する被保険者の給付水準を、一律 2 倍に変更したときの開放基金方式の標準保険料率として適切なものは、次のいずれか。(4 点)

$$(A) \frac{2 {}^AP {}^{OAN}P - {}^EP {}^{OAN}P - {}^EP {}^AP}{{}^EP - {}^AP}$$

$$(B) \frac{2 {}^EP {}^{OAN}P - {}^AP {}^{OAN}P - {}^EP {}^AP}{{}^EP - {}^AP}$$

$$(C) \frac{2 {}^EP {}^AP - {}^AP {}^{OAN}P - {}^EP {}^{OAN}P}{{}^EP - {}^AP}$$

$$(D) \frac{2 {}^EP {}^AP + {}^AP {}^{OAN}P - 2 {}^EP {}^{OAN}P}{{}^EP - {}^AP}$$

$$(E) \frac{2 {}^EP {}^AP + {}^EP {}^{OAN}P - 2 {}^AP {}^{OAN}P}{{}^EP - {}^AP}$$

問題10. ある Trowbridge モデルの年金制度は、保険料は年 1 回期初払い、期初の在職中の被保険者および受給者の年齢別の人員構成が以下の l_x で定常状態にある。この年金制度の期初（新規加入後、保険料および給付支払い前）の積立金として最も近いものは次のいずれか。財政方式は加入年齢方式（特定年齢 55 歳）、定年年齢（年金の支給開始年齢）は 60 歳、最終年齢は 65 歳とする。なお、 s_x は期初における一人当たり給付現価または年金現価、 g_x は期初における在職中の被保険者の一人当たり人数現価とする。また、計算の仮定で必要となる場合、標準保険料は小数第 4 位を四捨五入、予定利率はパーセント単位で小数第 2 位を四捨五入するものとする。（4 点）

x	l_x	s_x	g_x
55	2,000	0.66180	3.39397
56	1,700	0.79416	2.87276
57	1,400	0.98362	2.31955
58	1,100	1.27692	1.71301
59	800	1.79088	1.00000
60	500	2.92271	
61	400	2.*****	
62	300	1.*****	
63	200	1.*****	
64	100	1.00000	
65	0		

- (A) 6,635 (B) 6,752 (C) 6,885 (D) 7,010 (E) 7,122

問題11. 前問において、ある年度に在職中の被保険者の脱退実績が 0 となった。このとき年度末に発生する未積立債務として最も近いものは次のいずれか。なお、脱退者の実績が 0 となった以外はすべて予定通りに推移したものとする。（4 点）

- (A) 1,003 (B) 1,225 (C) 1,465 (D) 1,672 (E) 1,868

問題12. ある年金制度は年間保険料 C 、給付額 $B (= 3C)$ 、年度末の積立金 F 、予定利率 i で定常状態にあった。ある年度に運用利回りが予定利率を大幅に下回り年度末の積立金が $0.8F$ となったため、翌年度（第 1 年度とする）より積立水準の回復を図ることとした。第 1 年度から t 年間保険料を $1.5C$ に引き上げるとともに、給付額を一律 0.8 倍に減額した結果、第 t 年度中に、保険料 $0.8C$ 、給付 B で定常状態となるような積立水準に到達した。 t として適切なものは次のいずれか。なお、保険料および給付は年 1 回期初払いとし、第 1 年度以降は、すべて予定通りに推移したものとする。また、 $v^5 = 0.86261$ 、 $v^6 = 0.83748$ である。（4 点）

- (A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

問題13. ある年金制度は財政方式を加入年齢方式、保険料および給付は年 1 回期初払い、予定利率は 1.0%で運営されている。

第 n 年度末および第 $(n + 1)$ 年度末の責任準備金はそれぞれ 1,000 および 1,111 であり、第 n 年度末は剰余金、未積立債務ともなかったが、第 $(n + 1)$ 年度は運用実績が年 6.0%と良好で剰余金が発生した。そこで第 $(n + 2)$ 年度期初から全在職中の被保険者および全年金受給権者に対し、一律 4%の給付改善を実施した。制度変更による給付および保険料の見直しは第 $(n + 2)$ 年度期初から適用したが、制度変更を行わなかった場合、第 $(n + 2)$ 年度の保険料および給付は、第 $(n + 1)$ 年度と同額になることが見込まれていた。第 $(n + 2)$ 年度の運用実績も第 $(n + 1)$ 年度と同じ年 6.0%となった場合、第 $(n + 2)$ 年度末時点の剰余金に最も近いものは次のいずれか。なお、第 $(n + 1)$ 年度と第 $(n + 2)$ 年度において、運用の実績以外はすべて予定通り推移しているものとし、いずれの年度にも特別保険料の拠出はないものとする。(4点)

- (A) 64 (B) 69 (C) 74 (D) 79 (E) 84

問題14. 事業主 A と B により共同して加入年齢方式で運営されている年金制度を考える。事業主 A と B は、年金制度を分割して、別々に運営することを希望しており、ある期末に、分割に係る財政計算を行うこととした。この財政計算時の諸数値は以下の通りであり、分割前後で基礎率の見直しは行わないものとする。なお、年金受給権者はいない。

	事業主 A	事業主 B
将来加入が見込まれる被保険者の給付現価(S^f)	93 百万円	78 百万円
在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価(S_{FS}^a)	107 百万円	120 百万円
在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価(S_{FS}^b)	180 百万円	200 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価(G^f)	620 百万円	520 百万円
在職中の被保険者の給与現価(G^a)	630 百万円	610 百万円
積立金(F)	300 百万円	

積立金は、事業主 A、B それぞれに使用される従業員に係る分割前制度の責任準備金の比で按分した額(百万円未満を四捨五入し、百万円単位)を分割後の新制度へ持ち込むこととする。分割後、事業主 A は、財政方式を開放基金方式に変更し、未積立債務は n 年の元利均等償却を行う。特別保険料の算定に用いる事業主 A の従業員に係る n 年間の給与現価を 281 百万円とすると、事業主 A が運営する分割後制度の特別保険料率に最も近いものは次のいずれか。なお、財政計算後、ただちに分割が行われ、保険料が適用されるものとする。(4点)

- (A) 15.1% (B) 15.2% (C) 15.3% (D) 15.4% (E) 15.5%

問題15. ある年金制度は、定年退職者に即時支給開始の保証期間付終身年金を支給し、定年前退職者に一時金を支給する制度となっており、第 n 年度まで定常状態にあった。この間、この年金制度に関する各年度（責任準備金は保険料および給付発生前の期初時点）の諸数値は以下の通りであった。（表中の金額単位は百万円）

責任準備金	5,000
保険料	300
給付金額（年金）	50
給付金額（一時金）	355

また、責任準備金のうち、年金受給者に関する諸数値は以下の通りであった。

	年金額	保証期間中の年金に対する給付現価	保証期間経過後の年金に対する給付現価
保証期間中の年金受給者	37	363	189
保証期間経過後の年金受給者	13	—	81

$(n+1)$ 年度は、運用利回りが予定利率を下回ったため、未積立債務 105 百万円が発生した。 $(n+2)$ 年度についても運用利回りが予定利率を下回ったが、保証期間中の年金受給者の 30%が年金に代えて一時金を選択したことにより、未積立債務の増加額が $(n+1)$ 年度と同額となった。 $(n+2)$ 年度の運用利回りとして最も近いものは次のいずれか。 $(n+1)$ 年度の運用利回りおよび $(n+2)$ 年度の運用利回りと年金受給者の一時金選択以外は n 年度までと同様予定通り推移したものとする。その他の計算の前提は以下の通り。（4点）

- ・ 保険料と給付金（年金）は年 1 回期初払い
- ・ 給付金（一時金）は年 1 回期末払い
- ・ $(n+2)$ 年度に特別保険料の支払いはない。
- ・ 年金受給者の一時金選択については、 $(n+2)$ 年度の期初時点で保証期間中にある各年齢の年金受給者の 30%が一時金を選択したものとする。その一時金額は、年金額に給付利率による残余保証期間の確定年金現価率を乗じて算定された額とし、給付利率は予定利率と同率とする。年金受給者が選択した一時金の支払いは $(n+2)$ 年度の期初かつ給付金（年金）の支払い前に行われたものとする。

(A) 0.44% (B) Δ 0.04% (C) Δ 0.60% (D) Δ 1.18% (E) Δ 1.63%

問題16. 以下の空欄に当てはまる数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、計算の過程および解答の記入に際して、標準保険料は小数第3位を四捨五入して小数第2位、責任準備金は小数第1位を四捨五入して整数とする。また、問題文中で「期初」とは新規加入後、保険料および給付支払い前とする。(8点)

加入期間1年につき1の年金を脱退の翌期初から10年の年1回期初払確定年金で支払う年金制度がある。保険料は年1回期初払いで、基礎率等は以下の通りである。

- ・ 財政方式 加入年齢方式
 - ・ 特定年齢 30歳 (在職中の被保険者はすべて特定年齢の期初で加入している)
 - ・ 定年年齢 60歳 (60歳到達年度の期末脱退)
 - ・ 生存脱退率 0.2 (39歳および49歳)、 0.0 (それ以外)
 - ・ 死亡脱退率 全年齢 0.0
- (生存脱退および死亡脱退は期末に発生するものとする)
- ・ 生存脱退後または支給期間中の死亡率 全年齢 0.0
 - ・ 予定利率 年 3.0%

必要に応じて以下の数値を用いてもよい。

	予定利率 3.0%	予定利率 1.5%
$\ddot{a}_{\overline{10} }$	8.7861	9.3605
v^{10}	0.7441	0.8617

- (1) 標準保険料は \square ① である。また、期初において、年齢 49 歳の在職中の被保険者の一人当たり責任準備金は \square ② である。
- (2) (1) で定年脱退者のみ給付を 1.5 倍に改善する変更を行う。
このとき、標準保険料は \square ③ である。また、期初において、年齢 50 歳の在職中の被保険者の一人当たり責任準備金は \square ④ である。
- (3) (1) において予定利率を年 1.5% に変更したところ、標準保険料が大きく増加したため、標準保険料が (1) を上まわらないように給付の減額を行うこととした。
年金額を「加入期間 1 年につき 1 の年金 (ただし k を上限とする)」と定めた場合、条件を満たす整数 k の最大値は \square ⑤ である。
年金額の上限を \square ⑤ とした場合、期初において、49 歳の在職中の被保険者の一人当たり責任準備金は \square ⑥ である。
- (4) (3) において、年金の支給開始時期を「60 歳到達年度の翌期初」とし、(3) の上限を適用した年金額に、脱退から支給開始まで一年あたり 3.0% の利息を複利で付与するものとした。
このとき、標準保険料は \square ⑦ である。また、期初において、50 歳の在職中の被保険者の一人当たり責任準備金は \square ⑧ である。

問題17. 以下の空欄にあてはまる適切な算式を解答用紙の所定欄へ記入せよ。なお、空欄⑤は整数、空欄⑦は1つの記号、空欄⑧は語句を記入する。(8点)

ある年金制度は以下のようなキャッシュバランスプランを採用しており、定常状態となっている。

- ・年金の支給要件：定年年齢に到達
- ・年金の支給期間：定年年齢到達の翌期初から年1回期初払い10年確定年金
- ・年金額：加入期間中の「毎期初の給与に α を乗じたもの」の利率 j による年金支給開始時点までの元利合計を、利率 j による年1回期初払10年確定年金現価率で除した金額
(なお、 $\ddot{a}_{\overline{10}|}(j)$ を利率 j による年1回期初払 n 年確定年金現価率を表す記号とする)
- ・定年到達前の中途脱退者へは一時金も年金も支給しない
- ・保険料の支払時期：年1回期初払い
- ・加入年齢： x_e 、定年年齢： x_r 、期初 x 歳の一人当たり給与： b_x
- ・予定利率： i 、 $v = \frac{1}{1+i}$ 、 $d = 1 - v$

年金受給者一人当たりの年金額は $\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{①}}\right) \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}(j)}$ である。

この年金額に対して、 x 歳の給与に係る元利合計 $\boxed{\text{①}}$ にかかわる年金現価を x 歳の期初の保険料とするような財政方式を採用すると、 x 歳の期初の一人当たり保険料は、

$$b_x \alpha \times \boxed{\text{②}} \times \frac{\ddot{a}_{\overline{10}|}(i)}{\ddot{a}_{\overline{10}|}(j)} \times \frac{l_{x_r}}{l_x}$$

である。ここで、 $j = i$ としたときの、一年間の保険料の総額および給付の総額をそれぞれ C および B とおくと、

$$C = \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{③}}\right) \times l_{x_r}$$

$$B = \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{④}}\right) \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}(i)} \times l_{x_r} \times \boxed{\text{⑤}}$$

となる。このとき、定常状態における積立金の額を極限方程式から求める。

$$\begin{aligned} \frac{B}{d} &= \frac{1}{d} \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{④}}\right) \times l_{x_r} \times \left(1 + \frac{\boxed{\text{⑤}} - \ddot{a}_{\overline{10}|}(i)}{\ddot{a}_{\overline{10}|}(i)}\right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{④}}\right) \times l_{x_r} + \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{④}}\right) \times l_{x_r} \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}(i)} \times \frac{\boxed{\text{⑤}} - \ddot{a}_{\overline{10}|}(i)}{d} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{㊸}} \right) \times l_{x_r} &= \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{㊸}} \right) \times l_{x_r} \times (1 + v + v^2 + \dots) \\ &= \sum_{y=x_e+1}^{x_r} \left(\sum_{x=x_e}^{y-1} \boxed{\text{㊸}} \times l_{x_r} \right) + \frac{1}{d} \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{㊸}} \right) \times l_{x_r} \end{aligned}$$

また、 $\frac{\boxed{\text{㊸}} - \ddot{a}_{\overline{10}|}(i)}{d} = \sum_{y=x_r+1}^{x_r+9} \boxed{\text{㊸}}$ なので、

$$\frac{B}{d} - \frac{C}{d} = \sum_{y=x_e+1}^{x_r} \left(\sum_{x=x_e}^{y-1} \boxed{\text{㊸}} \times l_{x_r} \right) + \sum_{y=x_r+1}^{x_r+9} \left(\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}(i)} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\text{㊸}} \times l_{x_r} \right) \times \boxed{\text{㊸}}$$

となる。つまり、定常状態の積立金は在職中の被保険者がこれまでに支払った保険料の元利合計と、 $\boxed{\text{㊸}}$ の合計である。

問題18. 以下の空欄に当てはまる算式や語句を解答用紙の所定欄に記入せよ。(8点)

脱退・昇給・保険料の払込・給付の支払いが連続的(微分可能な時間の関数の値になる)に起こる場合に、単位給与あたりの責任準備金 ${}_tV_x$ について、以下の微分方程式が成立する。

$$\frac{d {}_tV_x}{dt} = P_t + (\delta + \mu_{x+t} - \lambda_{x+t}) {}_tV_x - s_t^{(x)} \mu_{x+t} \dots (1)$$

P_t : 時点 t における保険料率

δ : 利力

μ_{x+t} : 年齢 $(x+t)$ における脱退力

λ_{x+t} : 年齢 $(x+t)$ における昇給力

$s_t^{(x)}$: x 歳加入、 t 年で脱退した者の、脱退時の給与 1 に対する給付額(給付現価)

この式は、責任準備金の増加分が右辺の各構成要素に分解されることを表しているが、この各構成要素は、以下の通り解釈される。

P_t : 保険料の払込による増加

$\delta {}_tV_x$: 利息による増加

$\mu_{x+t} {}_tV_x$: ①

$-\lambda_{x+t} {}_tV_x$: ②

$-s_t^{(x)} \mu_{x+t}$: 支払による減少

(1)式の両辺に $\exp\left(-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s} - \lambda_{x+s}) ds\right)$ を乗じてから、 t_1 から t_2 まで積分すると、以下の式が得られる。

$$\span style="border: 1px solid black; padding: 10px 100px; display: inline-block;">③$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \exp\left(-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s} - \lambda_{x+s}) ds\right) (P_t - s_t^{(x)} \mu_{x+t}) dt \dots (2)$$

(2)式において、 $t_1 = 0, t_2 = \infty$ とする。 ${}_0V_x = 0$ 、 ${}_tV_x$ が有界であり、また、ある \tilde{t} より大きいすべての t について、 $\delta > \lambda_{x+t}$ であるものとする、

$$\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s} - \lambda_{x+s}) ds\right) (P_t - s_t^{(x)} \mu_{x+t}) dt = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px 20px; display: inline-block;">④ \dots (3)$$

となり、これは収支相等の原則を表す。

(2)式において、 $t_1 = T, t_2 = \infty$ とすれば、以下の通り、責任準備金 ${}_T V_x$ の式が得られる。

$${}_tV_x = \int_T^{\infty} \exp\left(\text{⑤}\right) \left(\text{⑥}\right) dt \dots (4)$$

なお、(2)式において、 $t_1 = 0, t_2 = T$ とすれば、以下の式が得られるが、これは過去法の責任準備金とも呼ばれているもので、時点 T まで予定通り推移したとした場合の単位給与あたりの積立金額に相当する。

$${}_tV_x = \int_0^T \exp\left(\text{⑦}\right) \left(\text{⑧}\right) dt \dots (5)$$

(3)式により、(4)式の右辺と(5)式の右辺は一致するが、これは、年金制度が予定通り推移した場合は、年金財政上損益が発生しないことを意味している。

問題19. Trowbridge モデルの保険料（保険料は年1回期初払い）に関して、以下の間に答えよ。（8点）

- (1) x 歳の在職中の被保険者の、単位積立方式の標準保険料を ${}^U P_x$ 、年齢別将来期間対応保険料を ${}^A P_x$ とする。このとき、 ${}^A P_x > {}^U P_x$ であることを示せ。なお、 $x_e \leq x < x_r - 1$ とする。
- (2) 開放基金方式の標準保険料 ${}^{OAN} P$ 、加入年齢方式の標準保険料 ${}^E P$ に関して、 ${}^{OAN} P > {}^E P$ であることを示せ。

問題20. 定常人口の状態にある Trowbridge モデルの年金制度（保険料は年1回期初払い）を考える。

当制度は、財政方式を加入年齢方式として運営しており、ある期初（給付支払前・保険料収入前）の積立金 F が責任準備金 ${}^E V$ を上回っている。このとき、以下の二通りの方法で保険料を引き下げること考える。なお、①、②ともに、毎年保険料を洗い替える（積立金が責任準備金を上回っている限り、以下と同様の計算方法で算出した保険料に洗い替え、それを毎年繰り返す）こととし、今後の積立金の実際運用利回りは予定利率と一致するものとする。（8点）

- ① $F - {}^E V$ を在職中の被保険者の人数現価 G^a で除したものを、本来の加入年齢方式の標準保険料 ${}^E P$ から控除して得たものを保険料とする。
- ② $F - {}^E V$ を在職中および将来加入が見込まれる被保険者の人数現価 $G^a + G^f$ で除したものを、本来の加入年齢方式の標準保険料 ${}^E P$ から控除して得たものを保険料とする。
- (1) ①の方法を用いた場合、積立金は単調に減少して本来の加入年齢方式の責任準備金に収束することを示せ。また保険料は、単調に増加して本来の加入年齢方式の標準保険料に収束することを示せ。
- (2) ②の方法を用いた場合、積立金および保険料は、毎年変化せず一定値であることを示せ。

以上