基礎数理Ⅱ（問題）

問題１．次の（１）から（１４）までの各問について、それぞれの選択肢の中から正しい解答を選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号［（１１）と（１４）については問に記載のとおり、それ以外は（ア）から（ク）のうちいずれか１つ］を記入しなさい。（84 点）

（１）年度末支払で第 n 年度 $(n \geq 1)$の年金額が $\frac{n+2}{4}$ の永久年金の現価が 4,000 であるとき、年度始支払で年金額が 1 の永久年金の現価の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、両永久年金の予定利率 $i\,(>0)$は同じ値とする。

（ア）121	（イ）122	（ウ）123	（エ）124
（オ）125	（カ）126	（キ）127	（ク）128

（２）次の条件を満たす定常社会において、0 歳の平均余命に最も近いのは次のうちどれか。

【条件】
・$l_x - l_{x-20}$ が $20 \leq \mathrm{x} \leq \omega$ において一定
・ $\omega = 100$
・20 歳から 60 歳の間で死亡する者の死亡時平均年齢は 36 歳

（ア）42	（イ）44	（ウ）46	（エ）48
（オ）50	（カ）52	（キ）54	（ク）56

（３）第１の生命表は死力 $\mu_x^{(1)} = A + B \times c^x$ に従い、第２の生命表は死力 $\mu_x^{(2)} = A' + B' \times c^x$ に従う。いま、第１の生命表の x 歳の者が 10 年間生存する確率 ${}_{10}p_x^{(1)}$ と、第２の生命表の x 歳の者が 4 年間生存する確率 ${}_4p_x^{(2)}$ が、全ての x について等しいとすると、$\frac{A'}{B'}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、$A = 0.002$、$B = 10^{-4}$、$c = 1.1$ とする。

（ア）14.56	（イ）15.06	（ウ）15.56	（エ）16.06
（オ）16.56	（カ）17.06	（キ）17.56	（ク）18.06

（4）ある集団が原因 A、B、C によって減少していく 3 重脱退残存表を考える。ここで、各脱退はそれぞれ独立に、かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。いま、 $p_x^* = 0.6$、$q_x^{A*} = 2 \times q_x^{B*}$、$m_x^C = 0.06$ のとき、q_x^A の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）0.210　（イ）0.215　（ウ）0.220　（エ）0.225
（オ）0.230　（カ）0.235　（キ）0.240　（ク）0.245

（5）x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払の保険（Ⅰ）～（Ⅳ）が下表のとおりであったとすると、空欄①の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、予定利率、予定死亡率は全ての保険で同じとする。

	給付内容		純保険料
	保険期間中に死亡したとき	満期まで生存したとき	
保険（Ⅰ）	死亡保険金として既払込純保険料を支払う	生存保険金 1 を支払う	0.1478
保険（Ⅱ）	死亡保険金として 1 と既払込純保険料の 2 倍の合計を支払う	何も支払わない	0.0347
保険（Ⅲ）	死亡保険金として 1 と既払込純保険料の合計を支払う	生存保険金 1 を支払う	0.1550
保険（Ⅳ）	死亡保険金 1 を支払う	生存保険金 1 を支払う	①

（ア）0.0756　（イ）0.0865　（ウ）0.0975　（エ）0.1084
（オ）0.1194　（カ）0.1303　（キ）0.1413　（ク）0.1522

（6）40 歳加入、保険期間 10 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払で、第 t 年度 $(1 \leq t \leq 10)$ に死亡した場合に死亡保険金 $1 + \min\left(\frac{t}{10}, \frac{1}{2}\right)$ を支払う保険金変動定期保険の純保険料に最も近いのは次のうちどれか。ただし、計算基数は下表のとおりとする。

x	N_x	M_x	R_x
40	2,046,781	44,786	1,648,498
45	1,729,063	44,153	1,425,740
50	1,430,406	43,208	1,206,690

（ア）0.00349　（イ）0.00353　（ウ）0.00357　（エ）0.00361
（オ）0.00365　（カ）0.00369　（キ）0.00373　（ク）0.00377

（7）${}_{40}V_{20} = 0.7$、${}_{20}V_{40} + {}_{20}V_{20} = 0.8$ であり、${}_{20}V_{40} > {}_{20}V_{20}$ のとき、$\dfrac{{}_{20}V_{40}}{{}_{20}V_{20}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）2.36　　（イ）2.66　　（ウ）2.96　　（エ）3.26
（オ）3.56　　（カ）3.86　　（キ）4.16　　（ク）4.46

（8）死力 μ_x が $\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ $(0 \leq x < 100)$ に従うとき、40 歳加入、保険料連続払終身払込、保険金即時支払、保険金額 1 の終身保険において、第 20 年度末の純保険料式責任準備金 ${}_{20}V_{40}^{(\infty)}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。ただし、利力 $\delta = 0.0198$、$\bar{a}_{\overline{20|}} = 16.5144$ とする。

（ア）0.209　　（イ）0.218　　（ウ）0.227　　（エ）0.236
（オ）0.245　　（カ）0.254　　（キ）0.263　　（ク）0.272

（9）全年齢において男性の死力は女性の死力の 1.5 倍とする。いま、x 歳の女性 3 人のうち 2 人以上が t 年後に生存している確率が、x 歳の男性 2 人が t 年後に共に生存している確率の 2 倍であるとすると、x 歳の女性 1 人と x 歳の男性 1 人のうち 1 人だけが t 年後に生存している確率に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）0.350　　（イ）0.375　　（ウ）0.400　　（エ）0.425
（オ）0.450　　（カ）0.475　　（キ）0.500　　（ク）0.525

（１０）次の（Ⅰ）から（Ⅴ）の条件を満たす、保険期間 n 年、保険料連続払全期払込、保険金即時支払の親子連生保険を考える。

（Ⅰ）加入時の年齢は、親 x 歳、子 y 歳とする。

（Ⅱ）加入から経過 t 年 $(0 < t < n)$ で、子の生存中に親が死亡した場合、死亡保険金 S_t を支払うとともに、以後は保険料の払込を免除する。

（Ⅲ）子が死亡した場合は、親の生死に関係なく死亡保険金 1 を支払い、契約は消滅する。

（Ⅳ）子が満期まで生存した場合は、生存保険金 1 を支払う。

（Ⅴ）生命表は親子とも同一で、付加保険料は考えない。

この保険の保険料年額を P としたとき、加入から経過 s 年 $(0 < s < n)$ で親子ともに生存している場合の純保険料式責任準備金 ${}_sV$ を表す式は次のうちどれか。

（ア）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{s|}} \right)$

（イ）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}_{y:\overline{s|}} \right)$

（ウ）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{n|}} \right)$

（エ）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}_{y:\overline{n|}} \right)$

（オ）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{s|}} \right) + \bar{A}_{y+s:\overline{n-s|}}$

（カ）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}_{y:\overline{s|}} \right) + \bar{A}_{y+s:\overline{n-s|}}$

（キ）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{n|}} \right) + \bar{A}_{y+s:\overline{n-s|}}$

（ク）$\dfrac{1}{v^s \times {}_sp_{xy}} \times \left(P \times \bar{a}_{xy:\overline{s|}} - \displaystyle\int_0^s v^t \times S_t \times {}_tp_{xy} \times \mu_{x+t}\,dt - \bar{A}_{y:\overline{n|}} \right) + \bar{A}_{y+s:\overline{n-s|}}$

（１１）次の（ア）から（オ）のうち、常に正しい算式をすべて選びなさい。なお、常に正しい算式が１つもないときは×を記入しなさい。

また、就業不能でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

（ア） $${}_tp_x^{ai} = \frac{l_{x+t}^{aa} - l_x^{ii} \times {}_tp_x^i}{l_x^{aa}}$$

（イ） $${}_tp_x^{a} = \frac{l_{x+t} - l_x^{ii} \times {}_tp_x^i}{l_x^{aa}}$$

（ウ） $${}_tq_x^{a} = \frac{l_x^{aa} - l_{x+t}^{aa} + l_x^{ii} \times {}_tp_x^i}{l_x^{aa}}$$

（エ） $$q_x^{ai} = \frac{d_x^{ii} - l_x^{ii} \times q_x^i}{l_x^{aa}}$$

（オ） $${}_{t|}q_x^{ai} = \frac{d_{x+t}^{ii} - l_{x+t}^{ii} \times q_{x+t}^i}{l_x^{aa}}$$

（１２）一部が空欄になっている死亡・就業不能脱退残存表が次のとおり与えられており、この死亡・就業不能脱退残存表では ${}_3q_{60}^a = 0.0415818$ であることがわかっている。このとき、空欄①の値に最も近いのは次のうちどれか。

なお、死亡および就業不能はそれぞれ独立に、かつ１年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

x	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}
60	84,312	1,072	①	3,096	②
61	③	1,139	552	3,457	139
62	④	1,207	637	3,870	164
63	⑤	―	―	4,343	―

（ア）466　（イ）468　（ウ）470　（エ）472
（オ）474　（カ）476　（キ）478　（ク）480

（１３） x 歳加入、保険期間 10 年、保険料年払全期払込で、次の給付を行う保険を考える。

【給付内容】

・保険期間中に死亡した場合は、死亡した年度末に、死亡した年度末の責任準備金を支払う（各年度末の責任準備金の値は正である）

・満期まで生存した場合は、生存保険金 1 を支払う

責任準備金はチルメル割合 0.020 の 5 年チルメル式で計上する。予定利率 $i = 0.5\%$、$\ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 4.911$のとき、この保険の第 6 年度以降の純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。

（ア）0.0859　　（イ）0.0878　　（ウ）0.0897　　（エ）0.0916

（オ）0.0935　　（カ）0.0954　　（キ）0.0973　　（ク）0.0992

（１４）x 歳加入、保険期間 n 年、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の養老保険において、予定利率 i は変えず、予定死亡率 $q_{x+s}\ (s \geq 0)$ のみを q'_{x+s} に変更することを考える。このとき、次の（ア）から（オ）のうち、選択肢に示された前提条件のもとで、当該選択肢の不等式が常に正しくなるものをすべて選びなさい。なお、選択肢に示された前提条件のもとで、当該選択肢の不等式が常に正しくなるものが 1 つもないときは×を記入しなさい。

また、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$、$A_{x:\overline{n}|}$、$P_{x:\overline{n}|}$、${}_{j}V_{x:\overline{n}|}$ の計算基礎率には予定利率 $i\ (>0)$、予定死亡率 q_{x+s} が用いられ、$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$、$A'_{x:\overline{n}|}$、$P'_{x:\overline{n}|}$、${}_{j}V'_{x:\overline{n}|}$ の計算基礎率には予定利率 i、予定死亡率 q'_{x+s} が用いられるものとする。

	【前提条件】	【不等式】
（ア）	$0 \leq t \leq n-1$ とし、 $q'_{x+t} \leq q_{x+t}$ の場合	$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} \leq \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$
（イ）	$0 \leq t \leq n-1$ とし、 $q'_{x+t} \leq q_{x+t}$ の場合	$A'_{x:\overline{n}|} \leq A_{x:\overline{n}|}$
（ウ）	$0 \leq t \leq n-1$ とし、 $q'_{x+t} \leq q_{x+t}$ の場合	$P'_{x:\overline{n}|} \leq P_{x:\overline{n}|}$
（エ）	$0 < t < n$ とし、 $q'_{x+j} < q_{x+j}\ (0 \leq j \leq t-1)$ $q'_{x+j} = q_{x+j}\ (t \leq j \leq n-1)$ の場合、$j \geq t$の範囲において	${}_{j}V'_{x:\overline{n}|} \leq {}_{j}V_{x:\overline{n}|}$
（オ）	$0 < t < n$ とし、 $q'_{x+j} = q_{x+j}\ (0 \leq j \leq t-1)$ $q'_{x+j} < q_{x+j}\ (t \leq j \leq n-1)$ の場合、$j \leq t$の範囲において	${}_{j}V'_{x:\overline{n}|} \leq {}_{j}V_{x:\overline{n}|}$

問題２．次の（１）から（２）までの各問について、空欄にあてはまる適切な１つの記号を、指定の解答用紙の所定欄に記入しなさい。なお、同じ記号を複数回用いてもよい。

１つの記号とは、q_{x+t}、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$、$D_x^{aa}$ 等をいい、$\dfrac{l_{x+t}}{l_x}$、${}_tp_x \times \mu_{x+t}$、$\sum_{t=0}^{\infty} v^t \times {}_{t|}q_x$ 、$N_x - N_{x+1}$ 等は不可とする。（16 点）

（１）x 歳加入、保険期間 n 年、保険料一時払、保険金即時支払、保険金額１の養老保険において、利力 δ の場合の純保険料 $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ と利力 δ' ($> \delta$) の場合の純保険料 $\bar{A}'_{x:\overline{n|}}$ との差 $\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}'_{x:\overline{n|}}$ を $Thiele$ の微分方程式を用いて求めることを考える。ただし、死力は μ_{x+s} ($s \geq 0$) でどちらの利力の場合も同じとする。

【$Thiele$ の微分方程式】

x 歳加入、保険期間 n 年、保険料連続払全期払込、保険金即時支払、加入から経過 t 年での純保険料が $P_t^{(\infty)}$、死亡保険金が S_t、生存保険金が E_t である保険の加入から経過 t 年での純保険料式責任準備金 ${}_tV^{(\infty)}$ について、次の微分方程式が得られる。この微分方程式を $Thiele$ の微分方程式という。

ただし、μ_{x+t} は $(x+t)$ 歳の死力、δ は利力、$P_t^{(\infty)}$ は区間 $[\, t, t+\varepsilon \,]$ の間に収入される純保険料の総額が $P_t^{(\infty)} \times \varepsilon$ であることを意味し、生存保険金を表す E_t も同様である。

$$\frac{d}{dt}\, {}_tV^{(\infty)} = (\, \mu_{x+t} + \delta \,) \times \, {}_tV^{(\infty)} + P_t^{(\infty)} - E_t - \mu_{x+t} \times S_t$$

$Thiele$ の微分方程式を利力 δ と利力 δ' の各養老保険の純保険料式責任準備金に適用して変形すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}}\right)$$

$$= \left(\boxed{\;①\;} + \boxed{\;②\;}\right) \times \left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}}\right) - \left(\boxed{\;③\;} - \boxed{\;④\;}\right) \times \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

両辺に $e^{-\delta' t} \times \boxed{\;⑤\;}$ を乗じて変形すると、

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\delta' t} \times \boxed{\;⑤\;} \times \left(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}}\right)\right\}$$

$$= -\left(\boxed{\;③\;} - \boxed{\;④\;}\right) \times e^{-\delta' t} \times \boxed{\;⑤\;} \times \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

両辺を 0 から n まで積分すると、

$$-\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}'_{x:\overline{n|}}\right) + e^{-\delta' n} \times \boxed{\;⑥\;} \times \left(\bar{A}_{x+n:\overline{0|}} - \bar{A}'_{x+n:\overline{0|}}\right)$$

$$= -\left(\boxed{\;③\;} - \boxed{\;④\;}\right) \times \int_0^n e^{-\delta' t} \times \boxed{\;⑤\;} \times \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}\, dt$$

左辺第２項は０となるから、

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}'_{x:\overline{n|}} = \left(\boxed{\quad ③ \quad} - \boxed{\quad ④ \quad} \right) \times \int_0^n e^{-\delta' t} \times \boxed{\quad ⑤ \quad} \times \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} dt$$

が求まる。

（２）就業者である x 歳の被保険者が次の給付を行う保険期間 n 年の保険に加入する場合を考える。

【給付内容】

・保険期間中に就業不能にならず死亡した場合、死亡した年度末に既払込純保険料を返還する

・保険期間中に就業不能となって死亡した場合、死亡した年度末に保険金額 1 を支払う

・上記以外の給付はない

予定利率は i とし、保険料は年払で、保険期間中に被保険者が就業している限り、毎年度始に払い込むものとする。なお、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

この保険の純保険料を P とすると収支相等の関係より

$$P \times \ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|} = P \times \sum_{t=1}^{n} t \times v^t \times \boxed{\text{①}} + \sum_{t=1}^{n} v^t \times \boxed{\text{②}}$$ が成り立つ。

$$\boxed{\text{②}} = \frac{d^{ii}_{x+t-1} - l^{ii}_x \times \boxed{\text{③}}}{l^{aa}_x}$$ を用いて P を計算基数で表すと

$$P = \frac{M^{ii}_x - M^{ii}_{x+n} - \dfrac{\boxed{\text{⑦}}}{\boxed{\text{⑥}}} \times \left(M^i_x - M^i_{x+n}\right)}{N^{aa}_x - N^{aa}_{x+n} - \left(\sum_{t=1}^{n} \boxed{\text{④}} - \boxed{\text{⑤}} \times M^{aa}_{x+n}\right)}$$ となる。

いま、この保険の計算に用いる死亡・就業不能脱退残存表の x 歳の就業者数 l^{aa}_x 人が、同時にこの保険に加入したとすると、第 t 年度末 $(0 < t < n)$ の生存者数は就業者、就業不能者を合わせて $l^{aa}_{x+t} + \left(l^{ii}_{x+t} - l^{ii}_x \times {}_tp^i_x\right) = l_{x+t} - l^{ii}_x \times {}_tp^i_x$ となることから、

この保険の第 t 年度末の純保険料式責任準備金を ${}_tV$ として、過去法で責任準備金を求めると

$$\left(l_{x+t} - l^{ii}_x \times {}_tp^i_x\right) \times {}_tV$$

$$= P \times \sum_{k=1}^{t} \boxed{\text{⑧}} \times (1+i)^{t-k+1}$$

$$-P \times \sum_{k=1}^{t} k \times \boxed{\text{⑨}} \times (1+i)^{t-k} - \sum_{k=1}^{t} \left(d^{ii}_{x+k-1} - l^{ii}_x \times \boxed{\text{⑩}}\right) \times (1+i)^{t-k}$$

となり、両辺に v^{x+t} を乗じて整理すると、

$${}_tV =$$

$$\frac{P \times \left\{(N^{aa}_x - N^{aa}_{x+t}) - \left(\sum_{k=1}^{t} \boxed{\text{⑪}} - \boxed{\text{⑫}} \times M^{aa}_{x+t}\right)\right\} - \left\{M^{ii}_x - M^{ii}_{x+t} - \dfrac{\boxed{\text{⑦}}}{\boxed{\text{⑥}}} \times \left(M^i_x - M^i_{x+t}\right)\right\}}{D_{x+t} - \dfrac{\boxed{\text{⑦}}}{\boxed{\text{⑥}}} \times D^i_{x+t}}$$

となる。