# 年金数理（問題）

本問題においては、以下のとおりとする。
1．「Trowbridge モデル」とは、定年退職者に対して毎年１の年金を、退職時より終身にわたり年１回期初に支給する年金制度をいう。
2．「加入年齢方式」とは、加入年齢を特定して算出された標準保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式(特定年齢方式)をいう。
3．「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいい、「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
4．特に断らない限り、予定利率$i$は正値を取るものとする。

問題１から15までは、それぞれの選択肢から、設問の答として正しいものを選んで、その記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。問題16から20までは、それぞれの指示にしたがって、解答用紙の所定欄に解答を記せ。

問題１．平均余命が$\mathring{e}_x=\dfrac{1}{5}(100-x)$で与えられるとき、${}_{20}p_{40}$として最も近いものは次のいずれか。（４点）

(A) 0.188　(B) 0.193　(C) 0.198　(D) 0.203　(E) 0.208

問題２．$x$歳の被保険者数が$l_x=4a-x\ (a\leq x\leq 3a)$、$\left(ただし a>0\right)$　で表される定常状態に達した年金制度があり、$a$歳の人が脱退するまでの平均加入年数は 24 年となっている。
ある時点以降、この制度の新規加入者数が半分となった。この時点から$a$年後の被保険者の平均年齢は、定常状態であったときに比べ何歳上昇したか。上昇年齢として最も近いものは次のいずれか。ただし、新規加入者は$a$歳に限り、脱退率には変化がないものとする。（４点）

(A) 2 歳　(B) 3 歳　(C) 4 歳　(D) 5 歳　(E) 6 歳

問題３．ある給与比例制の年金制度では、静態的な昇給の他に年$k$%のベースアップを見込んでいる。この動態的昇給率によって、ある年度の期初に 28 歳で加入した者の 60 歳到達年度の期末の給与は 66 万円になることが見込まれていた。ところが、44 歳の期末の給与までは予定通りだったものの、その後ベースアップが$0.5k$%となったため、60 歳の給与は 60 万円となった。仮に、すべての年齢でベースアップがなかった場合、60 歳の給与として最も近いものは次のいずれか。（４点）

(A) 40 万円　(B) 42.5 万円　(C) 45 万円　(D) 47.5 万円　(E) 50 万円

問題４．$n$年間各期初に「$1+$(前年までの給付の合計の$a$倍)」（ただし、$0<a<1$）を給付する年金（1年目の給付は 1）の現価(予定利率$i_1$)と、$n$年間各期初に 1 を給付する年金の現価(予定利率$i_2$)が等しくなった。このとき、$i_1$と$i_2$の関係で正しいものは次のいずれか。（４点）

(A) $i_2=\dfrac{a}{1+a}i_1$　(B) $i_2=\dfrac{i_1}{1-a}$　(C) $i_2=\dfrac{1-a}{1+a}i_1$　(D) $i_2=\dfrac{i_1+a}{1-a}$　(E) $i_2=\dfrac{i_1-a}{1+a}$

問題５．以下の連生確率の数式中の数字①～⑤の合計として正しいものは次のいずれか。（４点）

・$p_{\overline{xyz}}=(p_x+p_y+p_z)+\boxed{①}\cdot(p_{xy}+p_{yz}+p_{zx})\ +\boxed{②}\cdot p_{xyz}$

・$p^{[1]}_{\overline{xyz}}=(p_x+p_y+p_z)+\boxed{③}\cdot(p_{xy}+p_{yz}+p_{zx})\ +\boxed{④}\cdot p_{xyz}$

・$p^{\ 2}_{\overline{xyz}}=(p_{xy}+p_{yz}+p_{zx})\ +\boxed{⑤}\cdot p_{xyz}$

(A) $-2$　(B) $-1$　(C) 0　(D) 1　(E) 2

問題６．以下の 4 つの数式は、Trowbridge モデルの年金制度の定常状態における保険料の額と給付現価の関係を表したものである。これらのうち正しいものの個数は次のいずれか。（４点）

① $S^p=\dfrac{{}^PC-v\,{}^TC}{1-v}$　② $S^a=\dfrac{v({}^TC-{}^{In}C)}{1-v}$　③ $S^a_{FS}=\dfrac{{}^UC-v^{In}C}{1-v}$　④ $S^f=\dfrac{v^{In}C}{1-v}$

(A) 0 個　(B) 1 個　(C) 2 個　(D) 3 個　(E) 4 個

問題７．定常状態にある年金制度において、ある年度、運用利回りの低下により、初めて未積立債務が発生した。この未積立債務を償却するため、翌年度以降、毎年度末の未積立債務の一定割合を次の年度に特別保険料として拠出することとした。特別保険料拠出中、予定利率を下回る一定の運用利回りで推移し、運用利回り以外は未積立債務発生前と変化がないものとしたとき、未積立債務の責任準備金に対する比率の収束値として正しいものは次のいずれか。ここで、予定利率を$i$、特別保険料拠出中の運用利回りを $j$、特別保険料として拠出する未積立債務の一定割合をαとする。なお、保険料および給付金については年 1 回期初払とし、αは、$(1-\alpha)(1+j)<1$ を満たすものとする。（４点）

(A) $\left(1+\dfrac{1+j}{1+i}\right)\dfrac{1}{1-(1-\alpha)(1+j)}$

(B) $\left(1+\dfrac{1-j}{1+i}\right)\dfrac{1}{1-(1-\alpha)(1+j)}$

(C) $\left(1-\dfrac{1+j}{1+i}\right)\dfrac{1}{1-(1-\alpha)(1+j)}$

(D) $\left(1-\dfrac{1+j}{1-i}\right)\dfrac{1}{1-(1-\alpha)(1+j)}$

(E) $\left(1-\dfrac{1+j}{1+i}\right)\{1-(1-\alpha)(1+j)\}$

問題８．定常人口にある集団に Trowbridge モデルの年金制度を導入する場合、財政方式に関する以下の文章にうち、正しいものの個数は次のいずれか（４点）

①閉鎖型総合保険料方式を採用した場合、期間の経過につれ、積立金は加入年齢方式の責任準備金に収束する。（保険料は毎年度洗い替えるものとする）

②閉鎖型総合保険料方式を採用した場合、標準保険料と特別保険料の区別はない。

③開放型総合保険料方式を採用した場合、利差損の発生による積み立て水準の低下は、その後予定通り推移したとしても保険料の洗い替えによっては解消できない。

④開放型総合保険料方式を採用した場合、制度発足時に在職中の被保険者の過去勤務期間を通算し、かつすでに退職した被保険者にも年金給付を行う場合の保険料は退職時年金現価積立方式の保険料と一致する。

(A) 0 個　(B) 1 個　(C) 2 個　(D) 3 個　(E) 4 個

問題９．２つの年金制度（ＡおよびＢ）が合併することになった。これらの年金制度は、以下の内容になっている。

・Ｂの被保険者数および給与額は、勤続・年齢別構成比がＡと等しく、規模はＡの 30%である。
・ＡとＢの計算基礎率（予定利率・予定脱退率等）は一致している。
・Ｂの給付水準はＡの 1.5 倍、Ｂの積立金残高はＡの 30%である。
・Ａの未積立債務はＡの総給付現価の 0.5 倍であり、Ａの特別保険料率は合併直前における総給与がその後一定という前提で$n$年償却するように設定されている。

今、合併にあたって、Ａの給付水準はそのままとし、合併後の特別保険料率が合併前のＡにおける特別保険料率の 1.1 倍以内に収まるようにＢの給付水準を一律$k$倍に引下げることを考えている。標準保険料率は合併前のＡのそれを使用し、特別保険料率は合併時の総給与がその後一定という前提で$n$年償却するように設定する。この場合に給付水準が最大となる$k$に最も近いものは次のいずれか。（４点）

(A) 0.69　(B) 0.72　(C) 0.75　(D) 0.78　(E) 0.81

問題10．Trowbridge モデルの年金制度（保険料は年 1 回期初払い）を考える。新規加入年齢 20 歳から定年年齢 60 歳まで、定年以外の生存脱退および死亡脱退は発生しないものとし、予定利率は 2.0%とする。単位積立方式における 30 歳の被保険者 1 人あたりの責任準備金と、加入年齢方式における$x$歳の被保険者 1 人あたりの責任準備金が一致するとき、$1.02^x$に最も近いものは次のいずれか。必要であれば$1.02^{10} = 1.219$を使用してもよい。（４点）

(A) 1.58　(B) 1.63　(C) 1.68　(D) 1.73　(E) 1.78

問題11．定常人口の集団に最終給与に比例する一時金を支払う制度を導入する。

財政方式は加入年齢方式とし、特別保険料は制度導入時の未積立債務を 5 年間で元利均等償却するように給与比例の特別保険料率を定めた。保険料および給付は年 1 回期初払いとする。

制度導入後、毎年度末に保険料計算に織り込まれていない 3.0%の給与改定（ベースアップ）があった場合、5 年度末の未積立債務の、制度導入時の未積立債務に対する比率として最も近いものは次のいずれか。なお、制度導入時の積立金はなく、特別保険料の見直しは行わず、ベースアップ以外は予定通り推移したものとする。また、予定利率は 2.5%であり、$\ddot{a}_{\overline{5}|}^{2.5\%} = 4.762$とする（４点）

(A) 10%　(B) 15%　(C) 20%　(D) 25%　(E) 30%

問題12．ある Trowbridge モデルに基づく年金制度が定常状態にあったとする。財政方式は開放基金方式であり、新規加入年齢は 57 歳、定年年齢は 60 歳、新規加入人数は毎年度期初に 1,000 人、保険料は年 1 回期初払いとする。ある年度、新規加入人数が定常状態の 0.2 倍となった。その年度の新規加入人数以外は予定通り推移したものとしたとき、翌年度期初（新規加入後、保険料および給付支払い前）の未積立債務として最も近いのは次のいずれか。なお、翌年度期初において標準保険料の見直しは行わず、将来加入する被保険者の人数および脱退率は定常状態と同じとする。予定利率は 1.0%、1 人当たりの給付現価、人数現価および標準保険料は以下の通りとする。（4 点）

| | 給付現価 | 人数現価 |
|---|---|---|
| 57 歳 | 1.04134 | 2.49789 |
| 58 歳 | 1.31469 | 1.89109 |
| 59 歳 | 1.47537 | 1.00000 |
| 60 歳 | 1.98683 | - |
| 標準保険料($^{OAN}P$) | | 0.41738 |

(A) 0.972　(B) 0.983　(C) 0.993　(D) 1.006　(E) 1.014

問題13．前問の定常状態にあった年金制度において、ある年度、在職中の被保険者のうち期初 57 歳の残存率が 0.9 となった。その年度の、この年齢の残存率以外は予定通り推移したものとしたとき、翌年度期初（新規加入後、保険料および給付支払い前）の未積立債務として最も近いのは次のいずれか。なお、翌年度期初において標準保険料の見直しは行わず、将来加入する被保険者の人数および脱退率は定常状態と同じとする。また、計算で必要な場合、在職中の被保険者の残存率は小数第 3 位を四捨五入するものとする。（４点）

(A) 36.29　(B) 42.03　(C) 48.34　(D) 52.54　(E) 58.09

問題14.「単年度の付与ポイント×ポイント単価×保険料率」を保険料とし、「在職中の各年度の期初における付与ポイントの累計×ポイント単価」に比例した給付を行うポイント制の年金制度において、ポイント単価を過去分の累積も含めて一律 0.8 倍にするとともに、今後付与するポイントの水準を一律 1.5 倍にする制度変更を行うこととした。なお、年金受給権者の給付は変更しない。このとき、制度変更後の責任準備金に最も近いものは次のいずれか。ただし、財政方式は加入年齢方式とし、保険料は年一回期初払いとする。制度変更前の諸数値は以下の通りであり、制度変更による基礎率の見直しはない。（４点）

| | |
|---|---|
| 年金受給権者の給付現価 | ：500 |
| 在職中の被保険者の過去に付与されたポイントに基づく給付現価 | ：900 |
| 在職中の被保険者の将来付与されるポイントに基づく給付現価 | ：600 |
| 在職中の被保険者の給与現価（「単年度の付与ポイント×ポイント単価」の現価） | ：800 |
| 標準保険料率 | ：95% |

(A) 1,028　　(B)1,095　　(C) 1,209　　(D) 1,376　　(E) 1,491

問題15. 加入年齢方式を採用している Trowbridge モデルの年金制度において、生存・死亡に関わらず中途脱退者に対して加入期間に比例した（加入期間一年あたり$k$の）一時金給付を支給することとした。以下の［条件］で Trowbridge モデルの標準保険料が 0.1755 であるとき、一時金を付加した後の標準保険料が 0.25 となるような$k$に最も近いものは次のいずれか。なお、解答にあたっては以下の［諸数値］の値を使用してもよい。（４点）

［条件］

加入年齢：22 歳、定年年齢：60 歳（60 歳に到達した年度の翌期初・保険料支払い前）
中途脱退率（死亡脱退と生存脱退の合計）：年齢に関わらず一年あたり一律 3.00%、
中途脱退の発生時期：期末
予定利率：1.75%

［諸数値］

$$\sum_{t=1}^{38} 0.97^t = 22.1714,\quad \sum_{t=1}^{38} t\times 0.97^t = 352.8931,\quad \sum_{t=1}^{38}\left(\frac{1}{1.0175}\right)^t = 27.5863,$$

$$\sum_{t=1}^{38} t\times\left(\frac{1}{1.0175}\right)^t = 480.7956,\quad \sum_{t=1}^{38}\left(\frac{0.97}{1.0175}\right)^t = 17.1014,\quad \sum_{t=1}^{38} t\times\left(\frac{0.97}{1.0175}\right)^t = 240.1816$$

(A) 0.12　　(B) 0.14　　(C) 0.16　　(D) 0.18　　(E) 0.20

問題16．以下の空欄にあてはまる適切な数値を解答用紙の所定欄へ記入せよ。なお、③は小数第 2 位を四捨五入して第 1 位までとし、他の値は小数第 1 位を四捨五入して整数とする。また、②および④～⑧において不足金、または不足要因（未積立債務の増加）の場合は数値の前に△を付すこと。（８点）

(1) 下の表はある年金制度の N 年度の期末の貸借対照表および損益計算書である。この年金制度は加入年齢方式を採用し、N 年度には特別保険料の拠出はない。保険料は期初払い、給付は期末払いであり、この年度の積立金の運用利回りは 5.0%であった。表中の運用収益は ① であり、未積立債務変動額は ② である。

N 年度期末貸借対照表

| | | | |
|---|---|---|---|
| 年金資産 | 9,200 | 年度末責任準備金 | 13,000 |
| 未積立債務 | 3,800 | | |

N 年度損益計算書

| | | | |
|---|---|---|---|
| 給付金 | 1,300 | 前年度末責任準備金 | 11,600 |
| 年度末責任準備金 | 13,000 | 保険料収入 | 2,400 |
| 未積立債務変動額 | ② | 運用収益 | ① |

N 年度の未積立債務の変動要因は利差損益、前年度末未積立債務にかかる予定利息による損益および責任準備金変動等損益の 3 要因に分けられる。このうち、責任準備金変動等損益が 50 の剰余要因であることが分かっているとする。このとき、予定利率は ③ %、利差損益は ④ 、前年度末未積立債務にかかる予定利息による損益は ⑤ である。

(2) N+1 年度は、給付金は N 年度と同じ、保険料収入は N 年度の標準保険料に N 年度期末の未積立債務の 20%を特別保険料として加算した金額であった。また、積立金の運用利回りは 10.0%、期末の責任準備金が 15,296 となった。このとき、未積立債務変動額は ⑥ であり、未積立債務変動額を以下のように区分すると、利差損益は ⑦ 、責任準備金変動等損益は ⑧ である。

N+1 年度未積立債務変動表

| | |
|---|---|
| 前年度末未積立債務にかかる予定利息 | *** |
| 当年度特別保険料 | *** |
| 当年度特別保険料にかかる予定利息 | *** |
| 利差損益 | ⑦ |
| 責任準備金変動等損益 | ⑧ |
| 合計（未積立債務変動額） | ⑥ |

問題17．以下の空欄に当てはまる算式または数値を解答用紙の所定欄に記入せよ。（８点）

定常状態で推移していたある年金制度について、ある年度以降の運用利回りが、予定利率$i$を下回る$j$で推移するようになった。この対応策として、予定利率を見直すことなく、特別保険料の設定（対策 1）または給付の減額（対策 2）のいずれかを実施することとした。保険料および給付は年一回期初払い、運用利回り以外はすべて予定通りに推移するものとする。また、運用利回り低下の前の定常状態における保険料、給付、責任準備金はそれぞれ$C$ 、$B$、 $V$とし、$V = 25.19 \times B$であった。

（対策 1）

年度末の未積立債務を永久償却する特別保険料を、翌年度の期初に支払うこととする。運用利回りが初めて$j$となった年度を第 1 年度とし、第$n$年度末の積立金を$F_n^1$とするとき、$\{F_n^1\}$の漸化式は以下のようになる。

$$F_n^1 = \left\{F_{n-1}^1 + C + \boxed{\quad ① \quad} - B\right\}(1+j)$$

この漸化式を整理すると、

$$F_n^1 = \left(\boxed{\quad ② \quad}\right) \times F_{n-1}^1 + \boxed{\quad ③ \quad}$$

となり、$\{F_n^1\}$は$\boxed{\quad ④ \quad}$に収束することがわかる（③には$F_{n-1}^1$を含まない）。

（対策 2）

年度末の積立状況に応じて、翌年度の給付水準を一律$k$倍することとする。なお、$k$は当年度末の積立金の、定常状態の責任準備金に対する比率である。

（対策 1）と同様に、第$n$年度末の積立金を$F_n^2$とするとき、$\{F_n^2\}$の漸化式は以下のようになる。

$$F_n^2 = \left(F_{n-1}^2 + C - \boxed{\quad ⑤ \quad}\right)(1+j)$$

この漸化式を整理すると、

$$F_n^2 = \left(\boxed{\quad ⑥ \quad}\right) \times (1+j) \times F_{n-1}^2 + C \times (1+j)$$

となる。ここで、

$$0 < \left(\boxed{\quad ⑥ \quad}\right) \times (1+j) < \left(\boxed{\quad ⑥ \quad}\right) \times (1+i) = 1 - \boxed{\quad ⑦ \quad} < 1$$

となるため$\{F_n^2\}$は収束する。

$j = 0.75\%$のとき、$\{F_n^2\}$の極限値に対する$k = 47.46\%$となった。このとき、予定利率は$\boxed{\quad ⑧ \quad}$%（小数第 3 位を四捨五入して第 2 位とする）である。

問題18．以下の空欄に当てはまる算式または語句を解答用紙の所定欄に記入せよ。（８点）

年金額が（給与累計）×（年金支給率）により算出され、生存脱退者に対して$x_r$歳支給開始の単純終身年金を支給する年金制度を考える。年金支給率を$\alpha$、$z$歳の給与を$b_z$とすると、期初$x$歳の加入者の給付現価$S_x$の計算式は、以下の通り表される。

$$S_x=\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\alpha\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{\boxed{②}}\ddot{a}'_{x_r}\right\}+\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x_r-1}b_z\right)D_{x_r}\ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$D_x$ , $C_y^{(w)}$など ：脱退残存表に基づく計算基数

$D'_x$ , $\ddot{a}'_{x_r}$など ：生命表に基づく計算基数、年金現価率等

給付現価$S_x$を将来および過去の加入期間に分けると、

$$S_x=\begin{cases}(1)\ x_e\text{歳}\sim x\text{歳までの過去の加入期間に対応する部分}\\(2)\ x\text{歳}\sim(x+1)\text{歳までの将来の加入期間に対応する部分}\\(3)\ (x+1)\text{歳}\sim x_r\text{歳までの将来の加入期間に対応する部分}\end{cases}$$

となり、(1) を $S_{xP.S.}$ 、(2) を ${}_{x\sim x+1}S_x$ とすれば、

$$S_{xP.S.}=\alpha\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right)\ddot{a}'_{x_r}\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{\boxed{②}}+D_{x_r}}{D_x}$$

$${}_{x\sim x+1}S_x=\alpha\boxed{\quad ④ \quad}\ddot{a}'_{x_r}\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{\boxed{②}}+D_{x_r}}{D_x}$$

となるが、加入期間が延びることによって過去期間分の給付現価が増加する様子を見るため、$S_{xP.S.}+{}_{x\sim x+1}S_x$を見てみることにする。

$$S_{xP.S.}+{}_{x\sim x+1}S_x=\alpha\left(\boxed{\quad ③ \quad}+\boxed{\quad ④ \quad}\right)\ddot{a}'_{x_r}\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{\boxed{②}}+D_{x_r}}{D_x}$$

$$=\alpha\left(\boxed{\quad ③ \quad}+\boxed{\quad ④ \quad}\right)\ddot{a}'_{x_r}\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{\boxed{②}}+D_{x_r}}{D_{x+1}}\cdot v\cdot\boxed{\quad ⑤ \quad}$$

$$=\alpha\left(\boxed{\quad ③ \quad}+\boxed{\quad ④ \quad}\right)\ddot{a}'_{x_r}\frac{C_x^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}}+\sum_{y=x+1}^{x_r-1}C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{\boxed{②}}+D_{x_r}}{D_{x+1}}\cdot v\cdot\boxed{\quad ⑤ \quad}$$

$$= \alpha\left(\boxed{\quad ③ \quad} + \boxed{\quad ④ \quad}\right)\ddot{a}'_{x_r}\left(\boxed{\quad ⑥ \quad}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}} + v \cdot \boxed{\quad ⑤ \quad}\frac{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{\boxed{\quad ② \quad}} + D_{x_r}}{D_{x+1}}\right)$$

$$= \boxed{\quad ⑥ \quad}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}} \cdot \alpha\left(\boxed{\quad ③ \quad} + \boxed{\quad ④ \quad}\right)\ddot{a}'_{x_r} + v \cdot \boxed{\quad ⑤ \quad} \cdot S_{x+1P.S.}$$

これは、仮に ${}_{x\sim x+1}S_x$ に相当する額を保険料として払込めば、$\boxed{\quad ⑦ \quad}$した場合に必要になる給付現価および$(x+1)$歳時における過去期間分の給付現価を賄うことができることを示している。さらに集団が定常状態に達しているとすれば、必要な保険料は毎年一定で、

$$C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x \cdot {}_{x\sim x+1}S_x$$

と表せる。これは財政方式として$\boxed{\quad ⑧ \quad}$の考え方となっている。

問題19.　Trowbridge モデルの年金制度に関して、以下の問いに答えよ。（８点）

(1)　単位積立方式の$x$歳の一人当たり保険料$\left({}^{U}P_x\right)$および開放基金方式の一人当たり標準保険料$\left({}^{OAN}P\right)$を、計算基数を用いた式で表せ。

(2)　開放基金方式の標準保険料は、単位積立方式の保険料の加重平均として表されることを示せ。

問題20．計算基準日から割引く年数$t$に応じて異なる予定利率$i(t)$、利率$j$には次の関係がある。このとき、以下の問いに答えよ。（８点）

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+i(t))^t}=\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+j)^t}$$

(1)　利率 $j$ は、利率 $i(t)$ の加重平均として以下の通り表されることを、平均値の定理を用いることにより示せ。ここで、$\xi(t)$は各$t$に応じて定まり、$i(t)$、$\xi(t)$、$j$には、$i(t)<\xi(t)<j$または$j<\xi(t)<i(t)$の関係があるものとする。

$$j=\frac{\sum_{t=1}^{T}t\big(1+\xi(t)\big)^{-t-1}i(t)}{\sum_{t=1}^{T}t(1+\xi(t))^{-t-1}}$$

【平均値の定理】

$f(x)$は$[a,b]$で連続、$(a,b)$で微分可能な関数とする。

このとき、次のようなξが少なくとも一つ存在する。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \ a<\xi<b$$

(2)　$i(t)=0.3\%\times t$、$T=5$ とする。

$2\leq t\leq 5$において、$\big(1+\xi(t)\big)^{t+1}<\dfrac{t}{t-1}$となることを示し、これを用いて$j>\dfrac{\sum_{t=1}^{T}i(t)}{T}$であることを示せ。なお、証明に当たっては次の定理を使用してもよい。

【定理】

三つの実数列$\{f_i\}$、$\{g_i\}$、$\{h_i\}$があり、

$$f_1\leq f_2\leq\cdots\leq f_n、g_j\geq 0、\sum_{j=1}^{n}g_j>0\ 、h_j\geq 0,\sum_{j=1}^{n}h_j>0$$

であるとする。このとき、

$$\frac{g_1}{h_1}\leq\frac{g_2}{h_2}\leq\cdots\leq\frac{g_n}{h_n}$$

であれば、次の関係式が成立する

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}f_jg_j}{\sum_{j=1}^{n}g_j}\geq\frac{\sum_{j=1}^{n}f_jh_j}{\sum_{j=1}^{n}h_j}$$

以上