リスクの数理

上原 崇人 (慶應義塾大学)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

・$\Omega \neq \emptyset$: (標本) 集合,

・$\mathcal{F} \subset 2^{\Omega} \leftarrow$ 部分集合の族 : σ-加法族 (情報系) i.e.
(i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A_i \in \mathcal{F}\ (i \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

・$P : \mathcal{F} \to [0,1]$: 確率測度 i.e. (a) $P(\Omega) = 1$,
(b) $A_i \in \mathcal{F}\ (i \in \mathbb{N})$ with $A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Longrightarrow P(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$.

用語 $\omega \in \Omega$: 標本, $A \in \mathcal{F}$: 事象, $P(A) \in [0,1]$: A の 確率.

解釈 Ω はこれから起こるシナリオ全体で, P はその確率である.
確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は既知とする.

定義 (確率変数)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X : \mathcal{F}$-可測 *i.e.*
$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\} \in \mathcal{F} \quad (a \in \mathbb{R})$.

解釈 確率法則 P に従って Ω の中から未知の標本 $\omega \in \Omega$ が選ばれ,
それに従って実現値 (例えば会社の資産)$X(\omega)$ が観測される.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X : \mathcal{F}$-可測 i.e.
$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\} \in \mathcal{F} \quad ({}^\forall a \in \mathbb{R})$.

記号 $\mathcal{L}^0(\Omega) = \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$: 確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 全体の集合.
$\longleftarrow$ 実ベクトル空間になる.

例 1 $\mathcal{F} = 2^\Omega$ のとき, 全ての関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ は確率変数.

例 2 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ のとき, 確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ は定数 $X \equiv m$.

実際, $\omega_0 \in \Omega$ を固定して $m = X(\omega_0) \in \mathbb{R}$ とおく.
- $\omega_0 \in X^{-1}((-\infty, m]) \in \{\emptyset, \Omega\}$ より, $X^{-1}((-\infty, m]) = \Omega$.
- $a < m$ のとき, $\omega_0 \notin X^{-1}((-\infty, a]) \in \{\emptyset, \Omega\}$ より, $X^{-1}((-\infty, a]) = \emptyset$.

$X^{-1}(\{m\}) = X^{-1}((-\infty, m]) - \cup_{a<m} X^{-1}((-\infty, a]) = \Omega. \quad \therefore X \equiv m.$

記号 実数 $m \in \mathbb{R}$ と定数関数 $X \equiv m$ を同一視する : $\mathbb{R} \subset \mathcal{L}^0(\Omega)$.

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間, $X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数.

$\rightsquigarrow$ $$E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) \in \mathbb{R}$$: X の 期待値.

期待値の性質

(1) $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ $(X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R})$.

(2) $E[\mathbb{I}_A] = P(A)$ $(A \in \mathcal{F})$. ただし, $\mathbb{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A). \end{cases}$$

- $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}^0(\Omega)$: 線形部分空間 (考えられる確率変数全体).

例 $\mathcal{X} = \mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \in \mathcal{L}^0(\Omega) \mid \|X\|_p < \infty\}$ $(p \in [1, \infty])$.

ただし, $$\|X\|_p := \begin{cases} E[|X|^p]^{1/p} & (p < \infty) \\ \inf\{r \mid P(|X| \leqq r) = 1\} & (p = \infty). \end{cases}$$

仮定 $\mathbb{R} \subset \mathcal{X}$.

確率変数 $X \in \mathcal{X}$ に対して, 1 期間後のリスク $\rho(X) \in \mathbb{R}$ を与える.

定義 ((貨幣的) リスク尺度)

$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: リスク尺度 (*normalized monetary risk measure*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(0) (正規化条件) $\rho(0) = 0$.

(1) (単調性) $X, Y \in \mathcal{X}$, $P(X \leqq Y) = 1 \Longrightarrow \rho(X) \geqq \rho(Y)$.

(2) (キャッシュ不変性) $X \in \mathcal{X}$, $m \in \mathbb{R} \Longrightarrow \rho(X + m) = \rho(X) - m$.

注 $P(X \leqq Y) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqq Y(\omega)\})$.

解釈 (1) 資産が多ければ, リスクは少なくなる.

(2) 安全資産があれば, その分リスクは少なくなる. ただし, 金利はゼロとする.

リスク尺度の可視化

- $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leqq 0\}$: 受容集合.

定義 (受容集合)

$\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: 受容集合 (*acceptance set*) $\overset{\text{def}}{\iff}$

(0) $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.

(1) $X \in \mathcal{A},\ Y \in \mathcal{X},\ P(X \leqq Y) = 1 \implies Y \in \mathcal{A}$.

(2) $X \in \mathcal{X} \implies \{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{R}$: 閉集合 $\notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

注 $\mathcal{A}(X) := \{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\} = [m_X, \infty)$: 区間 $(m_X \in \mathbb{R})$.

$\because$) $m_0 \in \mathcal{A}(X)$, $m \geqq m_0$ ならば, $X + m \geqq X + m_0 \in \mathcal{A}$ で $X + m \in \mathcal{A}$ より, $m \in \mathcal{A}(X)$. よって, 閉集合 $\mathcal{A}(X) \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ は $[m_X, \infty)$ の形の区間である.

$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: リスク尺度 (normalized monetary risk measure) $\overset{\text{def}}{\iff}$

(0) (正規化条件) $\rho(0) = 0$. 特に, $\rho(m) = -m \quad (m \in \mathbb{R})$.

(1) (単調性) $X, Y \in \mathcal{X}$, $P(X \leqq Y) = 1 \Longrightarrow \rho(X) \geqq \rho(Y)$.

(2) (キャッシュ不変性) $X \in \mathcal{X}$, $m \in \mathbb{R} \Longrightarrow \rho(X + m) = \rho(X) - m$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: 受容集合 (acceptance set) $\overset{\text{def}}{\iff}$

(0) $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.

(1) $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{X}$, $P(X \leqq Y) = 1 \Longrightarrow Y \in \mathcal{A}$.

(2) $X \in \mathcal{X} \Longrightarrow \mathcal{A}(X) := \{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\} = [\rho(X), \infty)$.

補題

- リスク尺度 $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leqq 0\}$ は受容集合.
- 受容集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ に対して, $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(X) = [\rho_{\mathcal{A}}(X), \infty)$ はリスク尺度.

- { リスク尺度 } $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ { 受容集合 }.

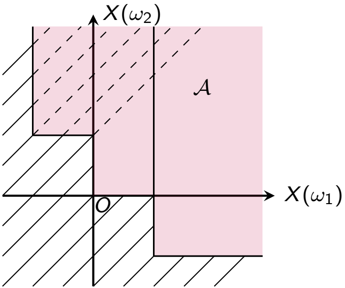
$\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: <u>受容集合</u> (acceptance set) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(0) $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.

(1) $X \in \mathcal{A},\ Y \in \mathcal{X},\ P(X \leqq Y) = 1 \Longrightarrow Y \in \mathcal{A}$.

(2) $X \in \mathcal{X} \Longrightarrow \mathcal{A}(X) := \{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\} = [\rho(X), \infty)$.

<u>例</u> $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\},\ \mathcal{F} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$. $\mathcal{X} = \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$.



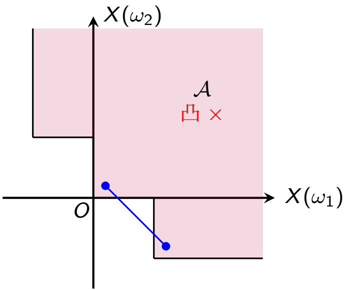
<u>注</u> $\dim \mathcal{X} < \infty$ のとき, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ が受容集合

$\Longleftrightarrow$ (0), (1) + (2)' $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ が (ノルムに関する) 閉集合.

定義 (凸リスク尺度 (Convex Risk Measure))

リスク尺度 $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が <u>凸リスク尺度</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}_\rho$ が凸 *i.e.* $X, Y \in \mathcal{A}_\rho,\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho.$



命題 (同値条件)

(1) $\mathcal{A}_\rho$ が凸 *i.e.* $X, Y \in \mathcal{A}_\rho,\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho$.

(2) <u>凸性 (*convexity*)</u>

$X, Y \in \mathcal{X},\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

(3) <u>準凸性 (*quasi-convexity*)</u>

$X, Y \in \mathcal{X},\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \max\{\rho(X), \rho(Y)\}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : $X, Y \in \mathcal{X}$ に対して, $\widetilde{X} = X + \rho(X)$, $\widetilde{Y} = Y + \rho(Y)$ とおくと, $\rho(\widetilde{X}) = \rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$ より $\widetilde{X} \in \mathcal{A}_\rho$, 同様に $\widetilde{Y} \in \mathcal{A}_\rho$ となる. $\lambda \in [0,1]$ に対して, $\lambda\widetilde{X} + (1-\lambda)\widetilde{Y} \in \mathcal{A}_\rho$ より,

$$\begin{aligned}0 &\geqq \rho(\lambda\widetilde{X} + (1-\lambda)\widetilde{Y}) = \rho\left(\{\lambda X + (1-\lambda)Y\} + \{\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)\}\right)\\ &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) - \{\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)\}.\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) : $X, Y \in \mathcal{X},\ \lambda \in [0,1]$ に対して,

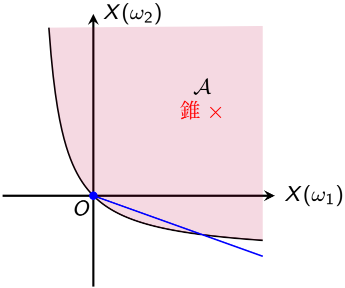
$$\begin{aligned}\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) &\leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)\\ &\leqq \lambda\max\{\rho(X), \rho(Y)\} + (1-\lambda)\max\{\rho(X), \rho(Y)\} = \max\{\rho(X), \rho(Y)\}.\end{aligned}$$

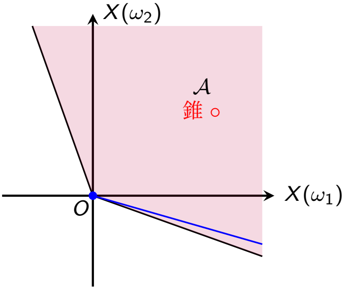
(3) $\Longrightarrow$ (1) : $X, Y \in \mathcal{A}_\rho,\ \lambda \in [0,1]$ とすると, $\max\{\rho(X), \rho(Y)\} \leqq 0$ より, $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq 0$. よって, $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho$.

定義 (コヒーレントリスク尺度 (Coherent Risk Measure))

凸リスク尺度 $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が <u>コヒーレントリスク尺度</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}_\rho$ が錐 *i.e.* $X \in \mathcal{A}_\rho,\ \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda X \in \mathcal{A}_\rho$.





命題 (同値条件)

(1) $\mathcal{A}_\rho$ が錐 *i.e.* $X \in \mathcal{A}_\rho,\ \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda X \in \mathcal{A}_\rho$.

(2) <u>正斉次性 (*positive homogeneity*)</u>
$X \in \mathcal{X},\ \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

<u>証明</u>

(1) $\Longrightarrow$ (2) : $X \in \mathcal{X},\ \lambda \geqq 0$ に対して, $\widetilde{X} = X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$ とおくと,

$$0 \geqq \rho(\lambda \widetilde{X}) = \rho(\lambda X + \lambda \rho(X)) = \rho(\lambda X) - \lambda \rho(X)$$

より $\rho(\lambda X) \leqq \lambda \rho(X)$. ここで, $\rho(\lambda X) < \lambda \rho(X)$ と仮定すると, $\lambda > 0$ であり,
$k = \rho(X) - \rho(\lambda X)/\lambda > 0$ とおくと,

$$0 = \rho(\lambda X) - \lambda \rho(X) + \lambda k = \rho(\lambda\{X + \rho(X) - k\})$$

より, $\lambda\{X + \rho(X) - k\} \in \mathcal{A}_\rho$. ここで $\mathcal{A}_\rho$ は錐より, $X + \rho(X) - k \in \mathcal{A}_\rho$ だが,
これは $\rho(X) - k \in \mathcal{A}_\rho(X) = [\rho(X), \infty)$ で矛盾する. よって, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : $X \in \mathcal{A}_\rho,\ \lambda \geqq 0$ とすると, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \leqq 0$ より $\lambda X \in \mathcal{A}_\rho$.

- $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: リスク尺度.
  (a) (凸性) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad (\lambda \in [0,1])$.
  (b) (正斉次性) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \quad (\lambda \geqq 0)$.
  (c) (劣加法性 (subadditivity)) $\rho(X+Y) \leqq \rho(X) + \rho(Y)$.

定理

(1) $(a), (b)$ が成り立てば, (c) も成り立つ.

(2) $(b), (c)$ が成り立てば, (a) も成り立つ.

(3) $\mathcal{X}$ が次の条件をみたすとき, $(c), (a)$ が成り立てば, (b) も成り立つ.

$$(\text{条件}) \quad X \in \mathcal{X} \Longrightarrow |X| \in \mathcal{X}.$$

<u>証明</u>

(1) $\rho(X+Y) = 2\rho\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) \leqq 2\left\{\frac{1}{2}\rho(X) + \frac{1}{2}\rho(Y)\right\} = \rho(X) + \rho(Y)$.

(2) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) = \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

(a) (凸性) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad (\lambda \in [0,1])$.

(b) (正斉次性) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \quad (\lambda \geqq 0)$.

(c) (劣加法性 (subadditivity)) $\rho(X+Y) \leqq \rho(X) + \rho(Y)$.

(c), (a) + "$X \in \mathcal{X} \Longrightarrow |X| \in \mathcal{X}$" $\quad \Longrightarrow \quad$ (b)

Step 1 $\lambda \in [0,1]$ のとき, $\rho(\lambda X) \leqq \lambda\rho(X)$ が成り立つ.
($\because$) (a) より, $\rho(\lambda X) = \rho(\lambda X + (1-\lambda)0) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(0) = \lambda\rho(X)$.

Step 2 $\lambda \geqq 1$ のとき, $\lambda\rho(X) \leqq \rho(\lambda X)$ が成り立つ.
($\because$) Step 1 より, $\lambda\rho(X) = \lambda\rho(\lambda^{-1}\lambda X) \leqq \lambda\lambda^{-1}\rho(\lambda X) = \rho(\lambda X)$ となる.

Step 3 $\lambda = n \geqq 1$ が整数のとき, (b) が成り立つ.
($\because$) (c) より $\rho(nX) \leqq n\rho(X)$ となるので, Step 2 より $\rho(nX) = n\rho(X)$ となる.

Step 4 $\lambda \geqq 0$ が有理数のとき, (b) が成り立つ.
($\because$) $\lambda = 0$ のとき (b) は成り立つ. $\lambda = \dfrac{n}{m}$($m, n \geqq 1$ は整数) とする. Step 3 と
$\dfrac{1}{m}\rho(X) = \dfrac{1}{m}\rho\left(m\dfrac{1}{m}X\right) = \rho\left(\dfrac{1}{m}X\right)$ より, $\rho\left(\dfrac{n}{m}X\right) = \dfrac{n}{m}\rho(X)$ となる.

(a) (凸性) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad (\lambda \in [0,1])$.

(b) (正斉次性) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \quad (\lambda \geqq 0)$.

(c) (劣加法性 (subadditivity)) $\rho(X+Y) \leqq \rho(X) + \rho(Y)$.

(c), (a) + "$X \in \mathcal{X} \Longrightarrow |X| \in \mathcal{X}$" $\quad \Longrightarrow \quad$ (b)

Step 5 $|\rho(X) - \rho(Y)| \leqq \rho(|X-Y|)$ が成り立つ．特に，$|\rho(X)| \leqq \rho(|X|)$.

($\because$) $\rho(X) = \rho(Y + (X-Y)) \leqq \rho(Y) + \rho(X-Y) \leqq \rho(Y) + \rho(|X-Y|)$ ($\because$ (c)) より，$\rho(X) - \rho(Y) \leqq \rho(|X-Y|)$ となる．同様に，$\rho(Y) - \rho(X) \leqq \rho(|X-Y|)$ となるため，$|\rho(X) - \rho(Y)| \leqq \rho(|X-Y|)$ が成り立つ．

Step 6 実数 $\lambda \geqq 0$ に対して，(b) が成り立つ．

($\because$) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ となる有理数 $\lambda_n \geqq 0$ (ただし，$|\lambda_n - \lambda| \leqq 1$) の列をとると，

$$|\lambda\rho(X) - \rho(\lambda X)| \leqq |\lambda\rho(X) - \lambda_n\rho(X)| + |\lambda_n\rho(X) - \rho(\lambda_n X)| + |\rho(\lambda_n X) - \rho(\lambda X)|.$$

- $|\lambda\rho(X) - \lambda_n\rho(X)| = |\lambda - \lambda_n||\rho(X)| \leqq |\lambda - \lambda_n|\,\rho(|X|) \quad$ ($\because$ Step 5).
- $|\lambda_n\rho(X) - \rho(\lambda_n X)| = 0 \quad$ ($\because$ Step 4).
- $|\rho(\lambda_n X) - \rho(\lambda X)| \leqq \rho(|\lambda_n - \lambda||X|) \leqq |\lambda_n - \lambda|\,\rho(|X|) \quad$ ($\because$ Step 5, Step 1).

$\therefore$ $|\lambda\rho(X) - \rho(\lambda X)| \leqq 2|\lambda_n - \lambda|\rho(|X|) \to 0 \ (n \to \infty)$. よって，(b) が成り立つ．

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数.

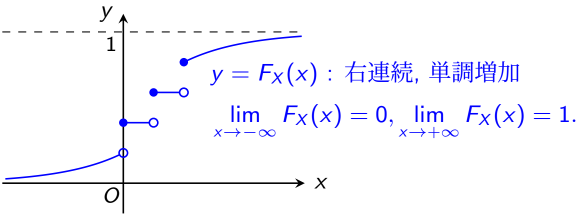
· $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_X(x) := P(X \leqq x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqq x\})$: <u>分布関数</u>.

· $F_X(x-) := P(X < x)$ $(x \in \mathbb{R})$ とおく.

定義 (分位 (Quantile))

(1) $q \in \mathbb{R}$ が X の <u>s–分位</u> $(s \in (0,1))$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $F_X(q-) \leqq s \leqq F_X(q)$.

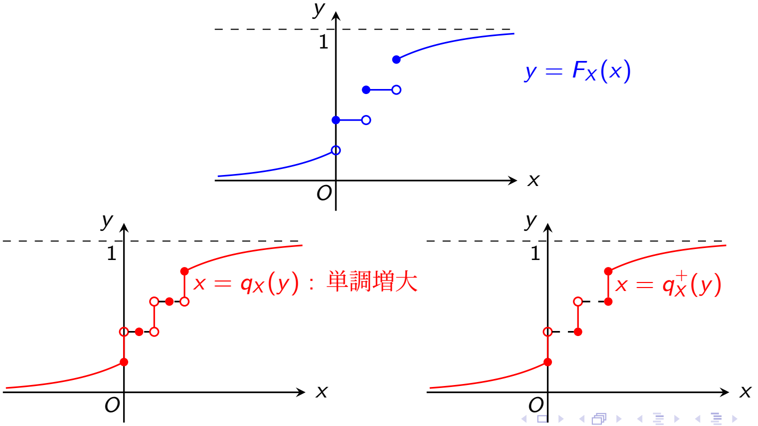
(2) $q_X : (0,1) \to \mathbb{R}$ が X の <u>分位関数</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ $F_X(q_X(s)-) \leqq s \leqq F_X(q_X(s))$.



$q_X : (0,1) \to \mathbb{R}$ が X の分位関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F_X(q_X(s)-) \leqq s \leqq F_X(q_X(s))$.

定義 (上方分位関数)

$q_X^+ : (0,1) \to \mathbb{R}$, $q_X^+(s) = \max\{x \in \mathbb{R} \mid F(x-) \leqq s\}$: 上方分位関数.

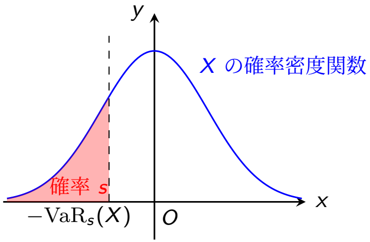


- $\rho : \mathcal{X} = \mathcal{L}^0(X) \to \mathbb{R}$, $\rho(X) = \mathrm{VaR}_s(X)$.

定義 (バリューアットリスク (Value at Risk))

$\mathrm{VaR}_s(X) = -q_X^+(s)$: 信頼水準 $s \in (0,1)$ の <u>バリューアットリスク</u>.

- $$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_s(X) &= -\max\{x \in \mathbb{R} \mid F(x-) \leqq s\} \\ &= \min\{-x \in \mathbb{R} \mid P(X < x) \leqq s\} \\ &= \min\{m \in \mathbb{R} \mid P(X + m < 0) \leqq s\}. \end{aligned}$$



- $\rho(X) = \mathrm{VaR}_s(X) = \min\{m \in \mathbb{R} \mid P(X + m < 0) \leqq s\}$.
  $\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leqq 0\} = \{X \in \mathcal{X} \mid P(X < 0) \leqq s\}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: 受容集合 (acceptance set) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(0) $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.

(1) $X \in \mathcal{A},\ Y \in \mathcal{X},\ P(X \leqq Y) = 1 \Longrightarrow Y \in \mathcal{A}$.

(2) $X \in \mathcal{X} \Longrightarrow \mathcal{A}(X) := \{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\} = [\rho(X), \infty)$.

(a) (凸) $X, Y \in \mathcal{A},\ \lambda \in [0, 1] \Longrightarrow \lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{A}$.

(b) (錐) $X \in \mathcal{A},\ \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda X \in \mathcal{A}$.

- $\rho = \mathrm{VaR}_s$ に対して, $\mathcal{A}_\rho$ は受容集合で錐である.
  ただし, 一般に $\mathcal{A}_\rho$ は凸ではない.

- $\rho(X) = \mathrm{VaR}_s(X) = \min\{m \in \mathbb{R} \mid P(X+m<0) \leqq s\}$.

(凸) $X, Y \in \mathcal{X},\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

例 $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$: 互いに独立で次をみたす確率変数 ($p = 0.03,\ n > 0$):

$$P(X=-n) = P(Y=-n) = p,\ P(X=0) = P(Y=0) = 1-p.$$

$\longleftarrow$ デフォルト確率が 3% の 2 銘柄の債券.

$s = 0.05$ に対して, $\mathrm{VaR}_s(X) = \mathrm{VaR}_s(Y) = 0$ である.

一方, $Z = \frac{1}{2}(X+Y)$ のとき,

$$P(Z<\alpha) = \begin{cases} p^2 = 0.0009 < s & (-n < \alpha \leqq -\frac{n}{2}) \\ 1-(1-p)^2 = 0.0591 > s & (-\frac{n}{2} < \alpha \leqq 0). \end{cases}$$

よって, $\mathrm{VaR}_s(\frac{1}{2}(X+Y)) = \frac{n}{2} > 0$ である. 特に, VaR_s は凸ではない.

問題点

- n に応じて損失があるにも関わらず, VaR_s には反映されていない.
- 複数銘柄を用いてリスクヘッジをしても, VaR_s は逆に大きくなる.

- $\rho : \mathcal{X} = \mathcal{L}^1(X) \to \mathbb{R}$, $\rho(X) = \mathrm{AVaR}_s(X)$.

定義 (平均バリューアットリスク (Average Value at Risk))

信頼水準 $t \in (0,1]$ の <u>平均バリューアットリスク</u> を次で定める：

$$\mathrm{AVaR}_t(X) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{VaR}_s(X)ds.$$

条件付きバリューアットリスク (*conditional value at risk*) や期待ショートフォール (*expected shortfall*) と呼ぶこともある.

$$\mathrm{VaR}_s(X) = -q_X^+(s) = \min\{m \in \mathbb{R} \mid P(X+m<0) \leqq s\}.$$

<u>例 1</u> $\lim_{t \searrow 0} \mathrm{AVaR}_t(X) = \inf\{m \mid P(X+m<0) \leqq 0\} = -\mathrm{ess\,inf}\, X \leqq +\infty$.

<u>例 2</u> $\mathrm{AVaR}_1(X) = E[-X]$ (後ほど確認する).

- ($\mathrm{VaR}_s(X)$ と同様に) $\mathrm{AVaR}_t(X)$ も正斉次なリスク尺度である.

記号 $\mathcal{R}_t = \{Z \in \mathcal{L}^0(\Omega) \mid 0 \leqq Z \leqq 1, E[Z] = t\}$.

定理

$$\mathrm{AVaR}_t(X) = \frac{1}{t}\sup\{E[-XZ] \mid Z \in \mathcal{R}_t\} = \frac{1}{t}\max\{E[-XZ] \mid Z \in \mathcal{R}_t\}.$$

系

$\rho = \mathrm{AVaR}_t : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ はコヒーレントリスク尺度である.

証明 ρ の凸性を示せばよい. $X, Y \in \mathcal{X}$, $\lambda \in [0,1]$ と $Z \in \mathcal{R}_t$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}E[-\{\lambda X + (1-\lambda)Y\}Z] &= \lambda\frac{1}{t}E[-XZ] + (1-\lambda)\frac{1}{t}E[-YZ] \\ &\leqq \lambda\,\mathrm{AVaR}_t(X) + (1-\lambda)\,\mathrm{AVaR}_t(Y).\end{aligned}$$

$Z \in \mathcal{R}_t$ は任意なので,

$$\mathrm{AVaR}_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\,\mathrm{AVaR}_t(X) + (1-\lambda)\,\mathrm{AVaR}_t(Y).$$

定理証明のポイント

1. 分位関数 $q_X(s)$ の分布.
2. Neyman-Pearson の補題.

$q_X : (0,1) \to \mathbb{R}$ が X の <u>分位関数</u> $\overset{\text{def}}{\iff} F_X(q_X(s)-) \leqq s \leqq F_X(q_X(s))$.

<u>注</u> $x < y \implies F_X(x) \leqq F_X(y-) \leqq F_X(y)$.

命題 (分位関数の分布)

$U : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数 $\sim \mathrm{U}(0,1)$ *i.e.* $P(U \leqq x) = x \ (x \in (0,1)) \implies$
$Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y(\omega) := q_X(U(\omega))$ に対して, $F_X = F_Y$ である.

<u>証明</u> · $s < F_X(s)$ のとき, $F_X(q_X(s)-) \leqq s < F_X(s)$ より, $q_X(s) \leqq x$.

· $q_X(s) \leqq x$ のとき, $s \leqq F_X(q_X(s)) \leqq F_X(x)$.

よって, $(0, F_X(x)) \subset \{s \in (0,1) \mid q_X(s) \leqq x\} \subset (0, F_X(x)]$ より,

$$F_X(x) = P(U \in (0, F_X(x))) \leqq P(U \in \{s \in (0,1) \mid q_X(s) \leqq x\})$$
$$\leqq P(U \in (0, F_X(x)]) = F_X(x). \qquad \therefore F_X(x) = P(Y \leqq x).$$

系

$$E[f(X)] = \int_0^1 f(q_X(s))ds \qquad (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{可測関数}).$$

<u>例 2</u> (再掲) $\mathrm{AVaR}_1(X) = \displaystyle\int_0^1 -q_X^+(s)ds = E[-X]$.

- $Z^0 : \Omega \to \mathbb{R}$ を $Z^0 = \mathbb{I}_{\{X<c\}} + \kappa \mathbb{I}_{\{X=c\}}$ で定める．ただし，

$$c = q_X(t) : X \text{ の } t\text{-分位}, \ \kappa = \begin{cases} \dfrac{t - P(X<c)}{P(X=c)} & (P(X=c)>0) \\ 0 & (P(X=c)=0). \end{cases}$$

注 $P(X<c) \leqq t \leqq P(X \leqq c)$ $\quad \rightsquigarrow P(X=c)=0$ のとき，$P(X<c)=t$.

命題 (Neyman-Pearson の補題)

(1) $Z^0 \in \mathcal{R}_t = \{Z \in \mathcal{L}^0(\Omega) \mid 0 \leqq Z \leqq 1, E[Z]=t\}$.

(2) $\sup\{E[-XZ] \mid Z \in \mathcal{R}_t\} = \max\{E[-XZ] \mid Z \in \mathcal{R}_t\} = E[-XZ^0]$.

証明

(1) $0 \leqq \kappa \leqq 1$ である．実際，$P(X=c)>0$ のときは，注より，

$$0 \leqq \kappa = \frac{t - P(X<c)}{P(X=c)} \leqq \frac{P(X \leqq c) - P(X<c)}{P(X=c)} = \frac{P(X=c)}{P(X=c)} = 1.$$

よって，$0 \leqq Z^0 \leqq 1$．また，$E[Z^0] = P(X<c) + \kappa P(X=c) = t$ が成り立つ．
よって，$Z^0 \in \mathcal{R}_t$ が示される．

(2) $Z \in \mathcal{R}_t$ に対して $E[-XZ] \leqq E[-XZ^0]$ を示せばよい．$W = Z^0 - Z$ とおく．
このとき，$(c-X)W \geqq 0$, $E[W]=0$ より，

$$E[-XZ^0] - E[-XZ] = E[-XW] \geqq -cE[W] = 0.$$

- $Z^0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $Z^0 = \mathbb{I}_{\{X<c\}} + \kappa \mathbb{I}_{\{X=c\}}$. ただし,

$$c = q_X(t) : X \text{ の } t\text{-分位}, \ \kappa = \begin{cases} \dfrac{t - P(X<c)}{P(X=c)} & (P(X=c)>0) \\ 0 & (P(X=c)=0). \end{cases}$$

注 $P(X=c)=0$ のとき, $P(X<c)=t$.

$$\mathrm{AVaR}_t(X) := -\frac{1}{t}\int_0^t q_X^+(s)ds = \frac{1}{t}\max\{E[-XZ] \mid Z \in \mathcal{R}_t\}.$$

証明

$q_X(s) = q_X^+(s)$ とおく. $q_X(s)$ は単調増大なので,

$$\begin{aligned} -\int_0^t q_X(s)ds &= \int_0^t (c - q_X(s))ds - c\,t = \int_0^1 (c - q_X(s))\mathbb{I}_{\{q_X<c\}}ds - c\,t \\ &= E[(c-X)\mathbb{I}_{\{X<c\}}] - c\,t = E[-X\mathbb{I}_{\{X<c\}}] - c\{t - P(X<c)\} \\ &= E[-X\mathbb{I}_{\{X<c\}}] - c\kappa P(X=c) = E[-XZ^0]. \end{aligned}$$

よって, Neyman-Pearson の補題より示される.

- S. Biagini and M. Frittelli, *On the Extension of the Namioka-Klee Theorem and on the Fatou Property for Risk Measures*, Optimality and risk - Modern trends in mathematical finance (2009), 1–28.
- H. Föllmer and H. Schied, *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*, de Gruyter, Berlin (2004).
- H. Föllmer and S. Weber, *The Axiomatic Approach to Risk Measures for Capital Determination*, Annual review of financial economics **7** (2015), no. 1, 301–337.
- 井上昭彦, 中野張, 福田敬, ファイナンスと保険の数理, 岩波数学叢書, 岩波書店 (2014).