確率解析の研究を振り返って

楠岡成雄

2019 年 3 月 11 日

研究

確率論に関する様々な研究

確率解析（マリアバン解析）
1980年頃〜

数理ファイナンス 1995年頃〜

フラクタル上の拡散過程
大偏差原理
数理物理学　等々

確率解析及び数理ファイナンスの研究

確率解析　（伊藤解析、マリアバン解析）

１．数学としての「確率論」

２．確率過程、伊藤解析

３．マリアバン解析

４．数理ファイナンス

数学としての「確率論」

確率（**Probability**）の歴史

貴族のギャンブルに対する考察から始まる

Cardano（1501-1576）：さいころ遊び

Galilei（1564-1642）

３個のサイコロを振ると９の目と１０の目のでる組合せはそれぞれ

９：　（１，２，６）、（１，３，５）、（１，４，４）、（２，２，５）、
（２，３，４）、（３，３，３）

10：　（１，３，６）、（１，４，５）、（２，２，６）、（２，３，５）、
（２，４，４）、（３，３，４）

の６通りであるのに、経験によれば９の目より１０の目の方がよくでる。これはどうしてか。

Pascal（1623-62）-Fermat（1601-65）　往復書簡

A，B ２人のプレーヤーがそれぞれ 32000 円ずつ賭け、先に３勝したが勝ちとするゲームを行った。ところが A が２勝、B が１勝した時点でゲームをやめねばならなくなった。この時、
掛け金をどう分配すればよいか。

大数の法則　**Bernoulli（Jacob）（1654-1705）**、**Poisson（1781-1840）**

De Moivre（1667-1754） 中心極限定理のめばえ

誤差論

Laplace（1749-1827）　連続な分布、正規分布

Gauss（1777-1855） 正規分布

Bayes（1706-1761） 原因の確率

２０世紀初頭までの「確率」の考え方

「合意可能な確率」

歴史的に見て、ヨーロッパでは「ある事象の確率」について教養人の多数が合意できる値が存在すると考えていたようである。

先験的確率（数学的確率とも呼ばれるが、現代から見れば不適当）
Laplace（1749-1827）
Keynes（1883-1946） 確率の論理的定義もこの系譜

統計的確率　経験的確率、確率頻度説
Poisson（1781-1840），
Cournot（1801-77），
Venn（1834-1923） Logic of chance, 1866
Richard von Mises（1883-1953）

Poisson（1781-1840）：「犯罪事象判断の確率についての研究」　1837
この本の中で、確率が同じでない独立な事象の起こる相対頻度が平均確率に確率収束することを示している。「合理的確率」は経験から帰納的に求めることが出来ると考えたようである。この本の第５章以後で「裁判における証人の証言が信頼できる確率」といったことが論じられているようである。

確率とは何か

確率論 : 確率の解析的理論 / P. S. Laplace 著 ;
伊藤清, 樋口順四郎訳・解説 (現代数学の系譜 12)

すべての事象は、よしんばごく小さなもので自然界の大法則とは何のかかわりもないもののようにみえるとしても、天体の運行と同じ必然さでこの法則に従って起こっている。与えられた時点において物質を動かしているすべての力と、その分子の位置や速度を知っている英知が、なおまたこれらの資料を解析するだけの広大な力を持つならば、同じ式の中に宇宙の最も大きな天体の運動も、又最も軽い原子の運動も包み込むであろう。このような英知にとっては、不規則なものは何一つなく、空気や水蒸気のたった一つの分子のが描く曲線も、太陽の軌道がわれわれにとってそうであると同じように、確実に規制されてみえるであろう。しかしこの大きな問題を解くために必要な資料の厖大さについてはわれわれは無知であり、その無力さ故に、極めて限られた数であるにも拘わらず、既知の資料の大部分は計算にかけることが不可能である。そしてわれわれにとっては何の秩序なしに継起するかにみえる現象を、その作用を偶然という語で言い表す不特定で隠された原因のせいにしてしまう。偶然という語は実のところわれわれの無知の表現にほかならない。

確率は一部分はこの無知に、また一部分はわれわれの知識に関連している。(後略)

「確率論の解析的理論」の初版ではナポレオンへの献辞が載っていたが再販の時はナポレオンがエルバ島に流されていたためか、献辞が載っていない。ド・モルガンはこれをラプラスの忘恩と臆病の表れと非難したと言われている。

先験的確率とは　思考実験

太郎君がこう言った。

今ここにある箱に同じ大きさの白玉と赤玉をいれてある。それぞれ何個入れたかは数は教えられないが、どちらも少なくとも１個は入れた。これから、よくかき混ぜて玉を１個取り出すよ。

Ｑ１．取りだした玉が赤玉である確率はいくらか？

「赤玉である可能性と白玉である可能性は
同様に確からしいので確率は 1/2 である。」

太郎君が玉を取り出すと赤玉であった。

そこで太郎君は更にこう言った

もう一度よくかき混ぜて、もう一つ玉を取り出すよ。

Ｑ２．取りだした玉が 赤玉である確率はいくらか？

？？？

確率を巡る論争

Richard von Mises（1883-1953） 確率、統計及び真理 1928
流体力学、空気力学、航空力学、熱力学の研究も行っている

我々の確率論は、「ドイツがリベリアとの戦いに関与する可能性はどのくらいか」といった疑問とは何の関係もない。

（Laplace が「蓋然性の哲学的考察」で扱った道徳科学や Poisson の犯罪事象判断などは対象ではない。対象となるとなるのは、保険、運任せのゲーム、分子運動論などである。）

確率論の基礎となり得るものは合理的な概念であり、この概念を適用できるものは同じ事象が何度も何度も繰り返し起きるような問題や一度に同じようなことが非常に多数発生するような問題である。物理学の言葉を使うならば、確率論を用いるためには、実際的に限りない同様な観測の列が得られることが絶対に必要である。

統計的確率（確率頻度説）に対する批判（代表は Keynes ）

多くの場合、確率の概念の応用は１度切りの事象に対して行われる

Frank H. Knight（1885-1972）
Risk, Uncertainty and Profit, 1948　危険、不確実性及び利潤
確率・不確実性は以下のように分類される
１．先験的確率
２．統計的確率
３．推定

Knight　は１，２は「合意可能」だが、３は「合意可能」ではないと考えた。事業の成功する可能性は推定で３に属する

「客観確率」

主観確率

F. Ramsey（1903-1936）
B. de Finetti（1906-1985）
L. Savage（1917-1971）　期待効用

数学としての「確率論」

以上のものは「科学」としての「確率論」である

A. Kolomogorov（1903-1987）

測度論的確率論

公理主義に基づき「確率論」の公理系を与える

「確率」の意味を問わないという立場

Hilbert の形式主義に基づいて

「確率論」を「科学」から切り離す

この結果、数学としての「確率論」が飛躍的に発展した

確率および統計：丸山儀四郎　共立出版　1956年

確率という概念は偶然性に関する考察から生まれたものである。
（中略）
現代の方法（Kolmogorovの方法）は、事象に対して確率を指定するという立場に立っている。この方法は確率を経験から切り離したもので、いわゆる公理主義の立場に立つものである。
（中略）
経験から生まれた概念は数学の対象となってもなかなか経験から離れることは困難である。
（中略）
概念にもり込みたい経験的事実はともかくとして一応経験との間に明確な線をひけというのが公理主義の立場であって Hilbert が確立した思想である。後に述べるように Kolmogorov の定義は公理主義の立場に立つものであって、そこでは事象に対して確率はわれわれが指定してやるものである。

確率を一応経験から解放したからといっても現象面との関連を不問にするものではない。公理系は経験的な事実を統一的法則でいかに説明するかということを重要な目的としている。確率の定義をめぐって過去にいろいろな批判や試みがなされた。経験主義の立場に立っての確率の定義は理論を深めることにも成功せずまた統計的な現象を統一ある法則のもとに説明することにも成功しなかったことは注目すべき事柄である。

数学としての「確率論」は数学モデルを提供するだけ

先験的確率
統計的確率
主観確率

確率をどのように解釈しても良いし、それを離れても良い

数理ファイナンス

リスク管理

リスク尺度（**VaR, CTE** 等）の理論

「確率」の持つ意味は重要！

デリバティブ複製の理論

モデルとなる「確率過程」が

経験をすべて反映する必要はない

確率過程モデル

偶然に支配され刻一刻変化するもの

マルコフ過程モデル

最も重要な確率過程モデル

マルコフ過程モデル

時間：　離散的　連続的

（状態）空間：　離散的　連続的

時間：離散的、空間：離散的

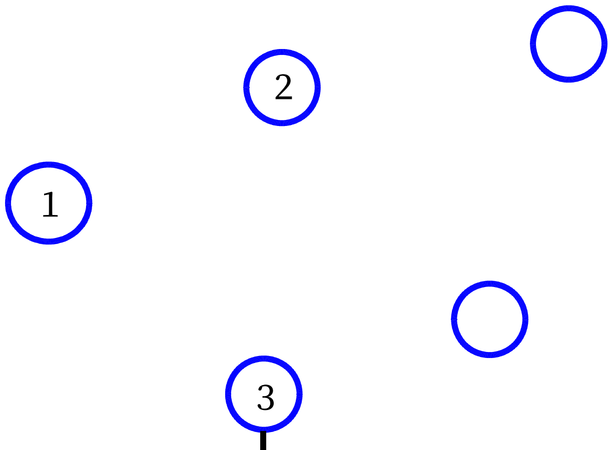
一人すごろく

スタート!!
ゴリラ
ヒツジ
リス
シマウマ
サイ
4つ すすみなサイ!
ペンギン
キリン
ライオン
ガオーン! びっくりして 1かいやすみ!
コアラ
コアラさんがねているよ! 4つすすむ!
カンガルー
ゾウ
ぞうさんのさすマスへもどる!
ラクダ
らくださんは、らくだなー! 2つすすむ!
カバ
カメ
のんびりいこう! 1かいやすみ!
パンダ
パンダさん かわいいな! 2つすすむ!
ワニ
アシカ
みんな ストップ!!
もういちど サイコロをふってね!
が出たら2回やすみ!
が出たら2つすすむ!
ゴール!!
ただいまー!!
たのしかった!
またいこうね!

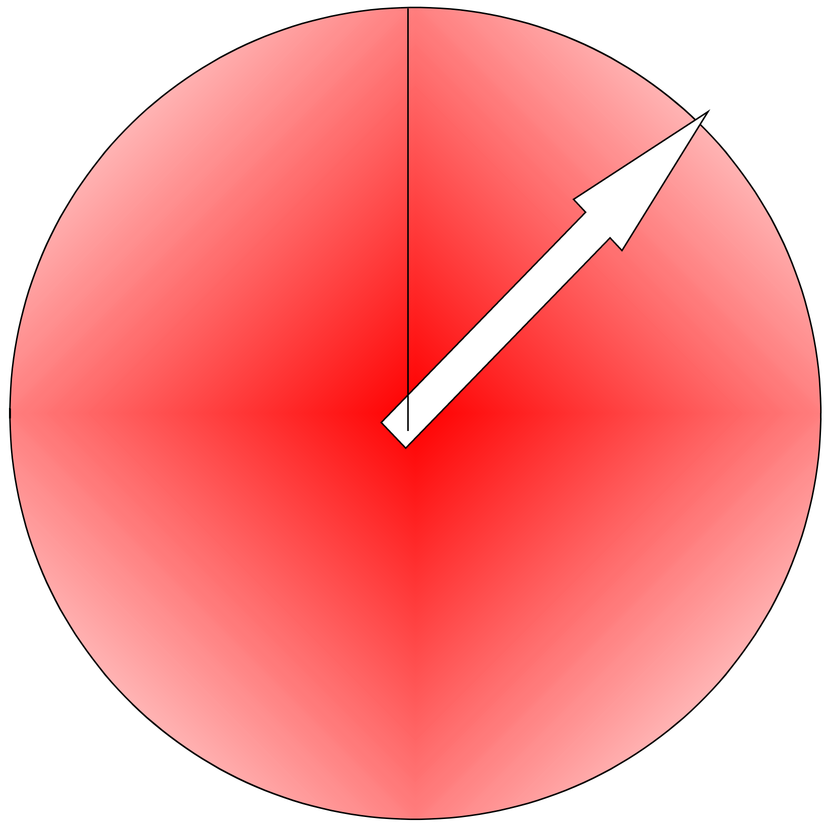
マルコフ過程

時間：離散　　空間：離散

一人すごろく

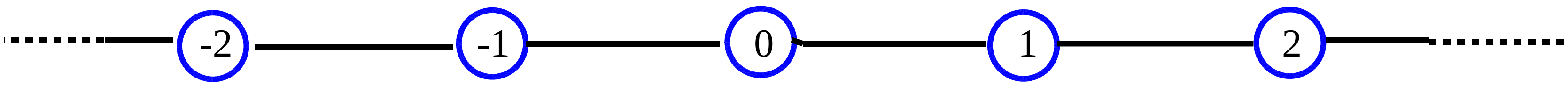


0.0 ～ 0.38：1 に進む
0.38 ～ 0.99：3 に進む
0.99 ～ 1.00：9 に進む

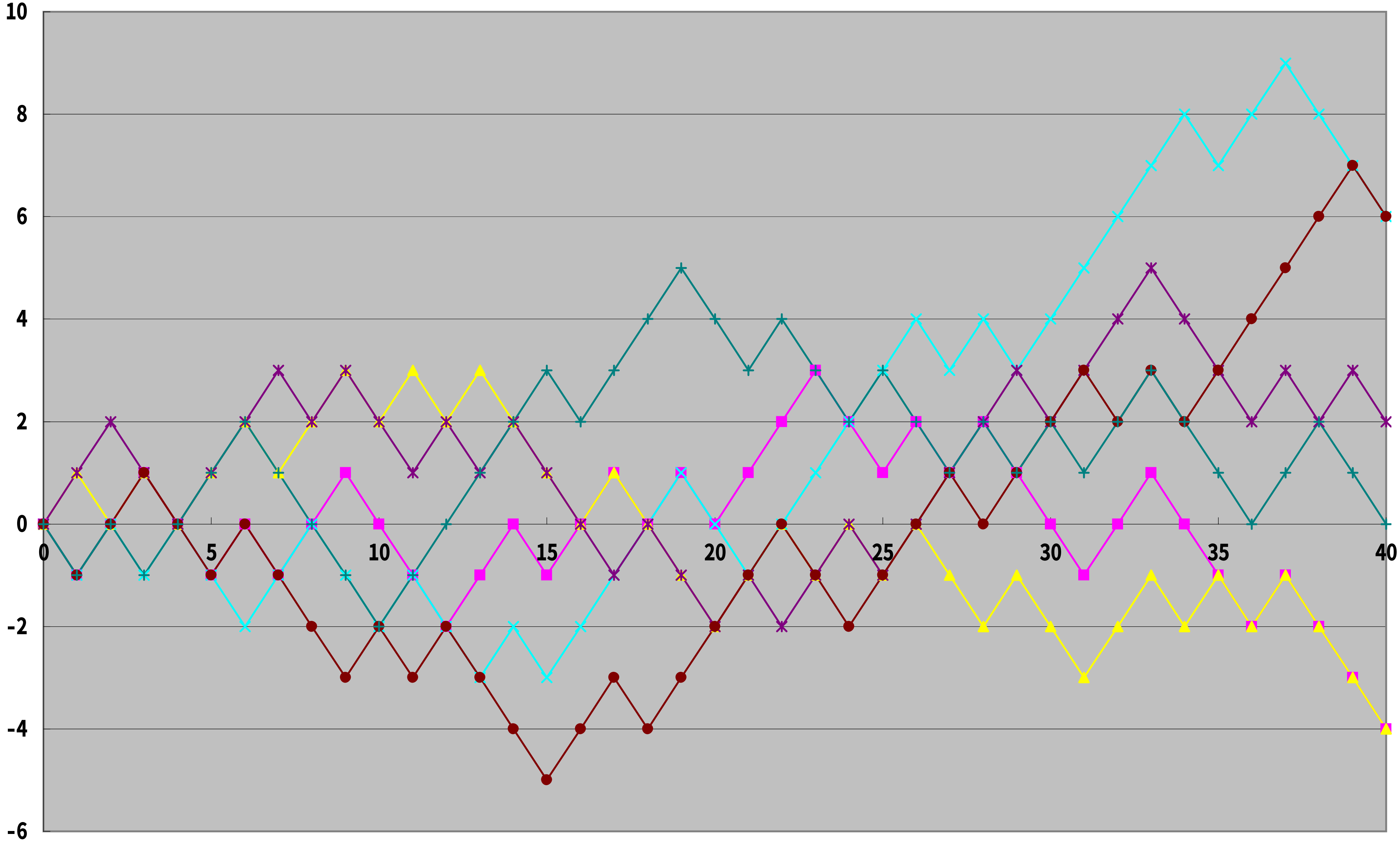


もっとも単純なマルコフ過程

ランダムウォーク



確率 **1/2**　で右へ一マス移動
確率 **1/2**　で左へ一マス移動


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
5
10
15
20
25
30
35
40

ランダムウォーク

規則に対応する漸化式

$$u(t+1,x) = \frac{1}{2}(u(t,x+1) + u(t,x-1))$$

書き換えた差分方程式

$$u(t+1,x) - u(t,x) = \frac{1}{2}(u(t,x+1) + u(t,x-1) - 2u(t,x))$$

平均量（統計量）の従う方程式

この方程式がすごろくの規則を決定している

Nikkei 225
2018/12/27
25000
20000
15000
10000
5000
2009/1
2011/1
2013/1
2015/1
2017/1
(C) 2018 Yahoo Japan Corporation.
https://stocks.finance.yahoo.co.jp

ブラウン運動: ランダムウォークの極限

Bachelier 1900　株価のモデル

Einstein 1905　ブラウン運動、原子論

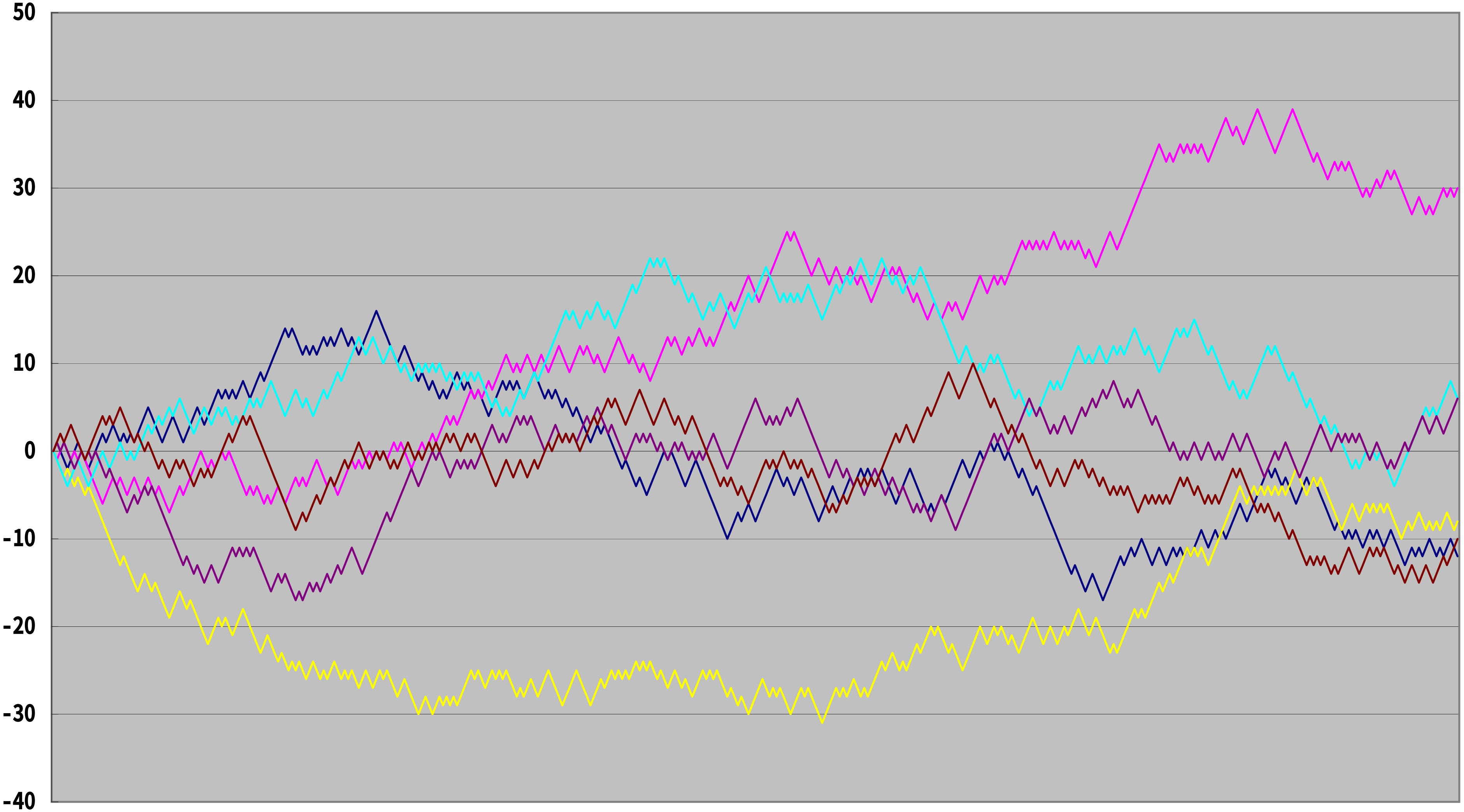
彼らが導いたのは偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

平均量に対する方程式

確率過程そのものを数学的に定義したとは言い難い

ブラウン運動



確率過程 としてのブラウン運動

Wiener 1923 : 関数空間上の確率測度 として構成

1 本 1 本のブラウン運動の軌道の記述

測度論の成立が背景にある

Cantor(1845-1941) 集合論 19 世紀末

Lebesgue(1845-1918) 測度論の基礎　20 世紀初め

コルモゴロフの公理系が現れる前

一般化

時間：離散　　空間：連続
時間：連続　　空間：離散
容易

時間：連続　　空間：連続

動きがジャンプのみ　容易
連続的に動くものが問題

拡散過程

Kolmogorov　1931

Kolmogorov (1931) のアイデア

空間：直線（多次元化は容易)

マス ： x すべての実数

マス x から dt 時間後に動く先のマス y

y の分布は平均 $x+b(x)dt$, 分散 $\sigma(x)^2 dt$

位置に依存している!

平均量の従う拡散方程式を導く

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\sigma(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)$$

Kolmogorov (1931) の 拡散方程式

すごろくの規則、平均量の記述

実際に駒の動く様子を記述したい

確率微分方程式

考えた人は何人もいたはず

Bachelier, Levy, ...

ブラウン運動を基礎にとり

「確率積分」をまず定義する

伊藤 1942

ブラウン運動の増分 dB_t を基礎にとる

$$x_t \longrightarrow x_t + \sigma(x_t)dB_t + b(x_t)dt$$

ブラウン運動：すごろくにおけるさいころの役割 確率微分方程式

$$dx_t = \sigma(x_t)dB_t + b(x_t)dt$$

「微分」は形式的なもの

確率積分方程式ととらえる

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s)dB_s + \int_0^t b(x_s)ds$$

伊藤 (1942) で示されたこと

確率積分の定義
確率微分方程式の解の存在と一意性

Kolmogorov の拡散方程式の導出:
複雑な議論が必要

1951　**伊藤の公式** の発見

マルチンゲール理論

国田-渡辺（1967）確率積分の一般化

$\Downarrow$

Meyer, ストラスブルグ学派

確率微分方程式の理論

Dtroock-Varadhan, 田中洋, Skorohod

応用

確率制御

ファイナンス

マリアバン解析

Malliavin P. 1980 年頃

無限次元解析の視点の導入

確率微分方程式の解が
「滑らかさ」を持つ

変分と部分積分の公式

マリアバン解析

池田信行-渡辺信三

Bismut J.M.

楠岡 - Stroock

Stein, Meyer, 杉田, . . .

マリアバン解析

背景

確率微分方程式（SDE)

$$dX(t) = \sigma(X(t))dB(t) + B(X(t))dt$$

$$X(0) = x_0$$

一人双六：さいの目の列　$\to$ 双六盤上のコマの軌道

確率微分方程式（SDE)

ブラウン運動の軌道 $w \in W_0 \to X(\cdot, w)$ SDE の解の軌道

w の関数

w の関数として連続か？　(1970 年代)

マリアバン　連続でなくても微分できる！

微分概念

１変数関数　微分

多変数関数　偏微分

無限変数の関数　変分

無限次元では連続でなくても「滑らか」　となりうる

（コロンブスの卵）

部分積分公式

確率微分方程式の持つ幾何学的構造

部分積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$$

例

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sin x)' \exp(-\frac{x^2}{2})dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sin x)x \exp(-\frac{x^2}{2})dx$$

同じ積分値を持つ関数を見つけることができる

確率論：期待値　＝　積分

マリアバン解析で何ができるようになったか？

確率微分方程式の解が滑らかな密度関数を持つか。

偏微分方程式の準楕円性

etc.

近年では数理ファイナンスへの応用が重要

ファイナンス

Black-Scholes（1973）

ヨーロピアンコールオプションの価格モデル

債券価格：一定金利
株価　：幾何的ブラウン運動

動的ヘッジング　無裁定

オプション価格は時間と株価の関数と仮定
株と債券のポートフォリオを刻一刻組み替え
オプションを複製

Merton (1973)

Black-Scholes の議論の正当化

伊藤解析でモデルを書き換えた

BS 論文では確率過程は裏で想定
表には微分方程式のみが現れている

刻一刻のポートフォリオ組み替え

⇒ 確率積分

2 次微分での打ち切り

⇒ 伊藤の公式

数理ファイナンス

デリバティブの価格はどのように決まるか

株価が確率過程 $S(t)$ で与えられる

コールオプションの価格は？

満期 T

行使価格 K

オプションの満期 T での価値 $\max\{S(T)-K,0\}$

金利 $r>0$ とする

多くの人は

割引価値 $\exp(-rT)\max\{S(T)-K,0\}$ の期待値

となると考えた

Black-Scholes, Merton の考え　(1973)

株価が確率微分方程式

$$dS(t) = \sigma S(t)dB(t) + \mu S(t)dt$$

$$S(0) = S_0$$

で与えられるとする (Black-Scholes モデル)

無リスク債券（国債) の価格 $U(t)$ は

$$U(t) = U_0 \exp(rt)$$

で与えられる

株と債券を市場で連続時間で売り買いする（動的ヘッジング戦略）

株価の割引価値 $\tilde{S}(t) = \exp(-rt)S(t)$

$$\exp(-rT)\max\{S(T)-K,0\} = c + \int_0^T \eta(t)d\tilde{S}(t)$$

となるものが存在する（伊藤の公式）

オプションの価格は c, 動的ヘッジ戦略は $\eta(t)$ (デルタヘッジ)

$\tilde{S}(t)$ がマルチンゲールとなる確率測度 Q が存在する

同値マルチンゲール測度　（リスク中立測度）

$$c = E^Q[\exp(-rT)\max\{S(T)-K,0\}]$$

確率測度 Q の下での期待値 (Q コルモゴロフの公理系を満たす)

「確率」は形式的なもの（頻度でもなければ、先見確率でもない）

数理ファイナンスの理論は 1980 年以後急速に整備・発展

モデルの複雑化

実務上　モデルは簡単な方がよい

BS モデル：　2 つのパラメータ

r 金利、　σ volatility

金利：市場で観測される

volatility ：　直接観測できない

　　　オプション価格から逆算する：implied volatility

BS 理論の登場　$\Rightarrow$ デリバティブ市場の発展

色々な行使価格のオプションの価格 $\rightarrow$ 異なる implied volatility

相対取引されるデリバティブの扱いが困難

BS モデルの限界

BS モデルに代わるモデル

金利に関するデリバティブ　金利モデル

BS モデル　 BS の公式　単純な計算式

複雑なモデル　単純な計算式がない！

数値計算に頼る　モンテカルロ法、準モンテカルロ法

2000 年頃から　「計算ファイナンス」　という分野が現れる

マリアバン解析の計算ファイナンスへの応用

アイデア１（部分積分）

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[a,\infty)}(x)\,(\frac{1}{2\pi})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \max\{x-a,0\}x\,(\frac{1}{2\pi})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = I_2$$

モンテカルロ法 X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ 独立、正規分布を持つ

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{[a,\infty)}(X_k) \to I_1, \qquad n \to \infty$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \max\{X_k - a, 0\}X_k \to I_2, \qquad n \to \infty$$

実行してみると後者の方が収束が早い

確率微分方程式の解から決まる確率変数

その期待値の計算

Euler-丸山　近似　が広く用いられる

　　丸山 (1955)

実装しやすい、収束が遅い

Euler-丸山法より良い方法

新しい方法（1999 年～）

K-scheme, KLNV 法（楠岡-Lyons-二宮-Victoir ）

その根拠はマリアバン解析で与えられる